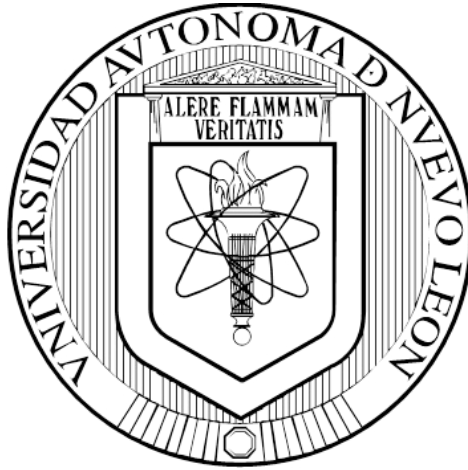


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE ROBOTS MÓVILES Y CONTROL DE
TRAYECTORIAS

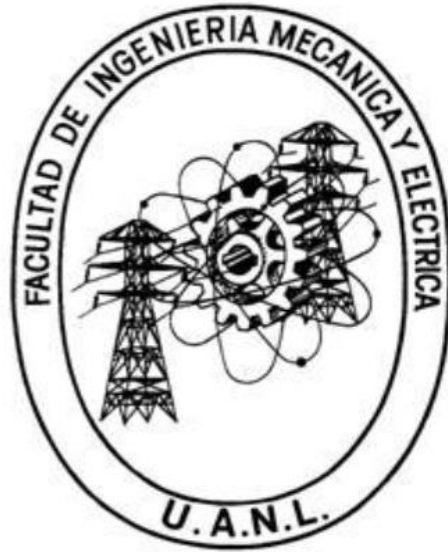
POR

CARLOS VARGAS ARVIZU

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

ABRIL, 2016

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



TESIS

**ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE ROBOTS MÓVILES Y CONTROL DE
TRAYECTORIAS**

**POR
CARLOS VARGAS ARVIZU**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA**

ABRIL, 2016

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la tesis "**Análisis de la Dinámica de Robots Móviles y Control de Trayectorias**" realizada por el alumno(a) **Carlos Vargas Arvizu**, con número de matrícula 1535222, sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica**.

El Comité de Tesis



Dr. Juan Angel Rodríguez Liñán
Asesor



Dr. Jesús Emmanuel Gómez Correa
Revisor



Dr. Eliezer Garza González
Revisor

Vo.Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México. Abril 2016

Quiero dedicar especialmente este trabajo a mi madre Lourdes y a mi padre Carlos por su gran apoyo, su confianza y cariño incondicional.

A mi hermano Ulises por su apoyo y compañía en los momentos importantes de mi vida.

A mi hija Edith Dannaë, mi mayor motivación e inspiración para seguir superandome día con día.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñan por su valiosa ayuda, motivación continua y asesorías constructivas para la realización de este trabajo de tesis.

También agradezco a mis profesores del Cuerpo Académico de Mecatrónica de la Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica por todo el esfuerzo, conocimientos y experiencias valiosas que brindaron en cada una de sus clases.

Agradezco al CONACYT y a la Universidad Autónoma de Nuevo León por la oportunidad de relizar mis estudios de maestría.

También agradezco al Dr. Eric Campos Cantón, M.C. Hector Gilardi Velázquez y a los estudiantes del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) por su hospitalidad y asesoría que fue de gran importancia para el desarrollo de este trabajo.

Doy gracias a Dios, a mi familia por todo el apoyo incesante y el estímulo brindado durante la realización de mis estudios.

Resumen

El presente trabajo consiste en el control de seguimiento de trayectorias que poseen comportamientos dinámicos complejos que permiten mejorar las tareas de exploración y vigilancia de áreas.

Para lograrlo, se propone el seguimiento de patrones de trayectorias con *dinámica caótica* y de *movimiento Browniano determinista*. Además, se realiza el análisis de la dinámica de las trayectorias resultantes en el seguimiento de las diferentes variables que pueden ser controladas en este sistema robótico.

Se hace la selección, desarrollo e implementación de estrategias de control para el *seguimiento de trayectorias*, en posición cartesiana, desplazamiento y orientación, se realiza el análisis de las trayectorias resultantes del control de seguimiento para identificar la dinámica producida en cada uno de los casos. Los sistemas dinámicos caóticos aseguran exploraciones densas en las trayectorias por la propiedad de transitividad topológica, y el movimiento Browniano, gracias al comportamiento perpetuo e irregular de las trayectorias que genera, garantizan que estos sistemas dinámicos son los mejores esquemas generadores de trayectorias de referencia.

Para ilustrar los resultados de la metodología, se lleva a cabo la simulación por medio del modelo dinámico de un robot móvil de configuración diferencial, y además, se realiza la implementación experimental usando un robot móvil comercial *e-puck*.

Índice General

| | |
|---|-------------|
| Agradecimientos | iv |
| Resumen | v |
| Índice General | vi |
| Índice de Tablas | viii |
| Índice de Figuras | ix |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Motivación | 1 |
| 1.2 Antecedentes | 2 |
| 1.3 Hipótesis | 11 |
| 1.4 Objetivos de la Tesis | 11 |
| 1.5 Organización de la Tesis | 12 |
| 2 Sistemas Generadores de Trayectorias | 14 |
| 2.1 Introducción | 14 |
| 2.2 Sistemas Dinámicos | 14 |
| 2.2.1 Estados de equilibrio | 17 |
| 2.3 Sistemas Dinámicos No Lineales | 18 |
| 2.4 Sistema Dinámico Periódico | 20 |
| 2.5 Sistemas Dinámicos Caóticos | 21 |
| 2.6 Movimiento Browniano | 25 |
| 2.6.1 Ecuación de Langevin para el Movimiento Browniano | 26 |
| 2.6.2 Aproximación para generar Movimiento Browniano Determinista | 29 |
| 3 Caracterización de Series de Tiempo | 32 |
| 3.1 Introducción | 32 |
| 3.2 Diseño de Herramienta para la Caracterización de Trayectorias | 32 |
| 3.3 Métodos Lineales | 33 |
| 3.3.1 Función de Autocorrelación | 34 |
| 3.3.2 Análisis de Fourier | 35 |
| 3.3.3 Espectro de Potencia | 36 |
| 3.4 Métodos No Lineales | 37 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.4.1 | Rango Reescalado de Hurst | 37 |
| 3.4.2 | Análisis de Fluctuación Sin Tendencia (DFA) | 42 |
| 3.4.3 | Reconstrucción del Atractor | 50 |
| 3.4.4 | Método de los Falsos Vecinos Cercanos | 51 |
| 3.4.5 | Información Mutua Promediada | 53 |
| 3.4.6 | Exponentes de Lyapunov | 54 |
| 3.4.7 | Dimensión de Correlación | 55 |
| 3.5 | Resumen de las Metodologías para la Caracterización de las Series Temporales . | 58 |
| 3.5.1 | Índices de los Análisis de las Series de Tiempo | 59 |
| 4 | Modelado de Robot Móvil | 61 |
| 4.1 | Introducción | 61 |
| 4.2 | Consideraciones para el Modelado de Robots Móviles | 61 |
| 4.2.1 | Configuración Diferencial | 63 |
| 4.3 | Desarrollo del Modelado Cinemático del RMR de Configuración diferencial . . . | 65 |
| 4.4 | Desarrollo del Modelo Dinámico del RMR de Configuración Diferencial | 73 |
| 5 | Control del Robot Móvil de Configuración Diferencial | 81 |
| 5.1 | Introducción | 81 |
| 5.2 | Tipos de Control | 81 |
| 5.3 | Control de Seguimiento de Trayectorias | 82 |
| 5.4 | Seguimiento en Variables de Desplazamiento D y Orientación θ | 83 |
| 5.4.1 | Controlador de Par Calculado | 85 |
| 5.4.2 | Controlador PD+ | 89 |
| 5.5 | Seguimiento en Variables Cartesianas (x_g, y_g) | 96 |
| 5.5.1 | Controlador Linealizante por Geometría Diferencial | 104 |
| 6 | Resultados Experimentales | 109 |
| 6.1 | Introducción | 109 |
| 6.2 | Implementación de la Herramienta para la Caracterización de Trayectorias . . . | 110 |
| 6.2.1 | Casos de Análisis de Series Temporales de Referencia | 110 |
| 6.3 | Escalamiento en Amplitud y Frecuencia de Sistemas Dinámicos | 113 |
| 6.4 | Implementación de Esquemas de Control | 115 |
| 6.5 | Implementación de Estrategia de Control de Seguimiento en Variables de Desplazamiento y Orientación | 120 |
| 6.6 | Implementación de Estrategia de Control de Seguimiento en Variables Cartesianas | 121 |
| 6.7 | Cuantificación del Área Recorrida | 124 |
| 6.7.1 | Resultados de la Exploración con Control de Variables de Orientación y Desplazamiento | 126 |
| 6.7.2 | Resultados de la Exploración con Control de Variables Cartesianas . . . | 127 |
| 6.7.3 | Conclusiones | 128 |
| | Bibliografía | 131 |

Índice de Tablas

| | |
|--|-----|
| 3.4.1 Posibles tipos de movimientos y sus correspondientes máximos exponentes de Lyapunov | 55 |
| 3.5.2 Tabla con los índices resultantes de la herramienta para la caracterización de trayectorias. | 59 |
| 3.5.3 Tabla con los índices resultantes de la herramienta para la caracterización de trayectorias. | 60 |
| 6.2.1 Caracterización de la serie temporal de la Figura 6.1. | 111 |
| 6.2.2 Caracterización de la serie temporal de la Figura 6.2. | 111 |
| 6.2.3 Caracterización de la serie temporal de la Figura 6.3. | 112 |
| 6.2.4 Caracterización de la serie temporal de la Figura 6.4. | 112 |
| 6.3.5 Sistemas dinámicos con escalamientos en frecuencia y amplitud utilizados como generadores de trayectorias. | 115 |
| 6.5.6 Caracterización de las trayectorias del control de seguimiento en coordenadas de posición local con referencias del sistema caótico de Lorenz. | 120 |
| 6.5.7 Caracterización de las trayectorias del control de seguimiento en coordenadas de posición local con referencias del modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano. | 121 |
| 6.6.8 Caracterización de las trayectorias del control de seguimiento en coordenadas de posición cartesiana con referencias del sistema caótico de Lorenz. | 123 |
| 6.6.9 Caracterización de las trayectorias del control de seguimiento en coordenadas de posición cartesiana con referencias del modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano. | 124 |
| 6.7.10 Resultados de la cobertura del área de trabajo de $1m \times 1m$ para el seguimiento en coordenadas de posición local. | 126 |
| 6.7.11 Resultados de la cobertura del área de trabajo de $1m \times 1m$ para el seguimiento en coordenadas de posición cartesiana. | 127 |

Índice de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Aplicaciones de Robots Móviles. | 2 |
| 1.2 | Comportamientos irregulares y complejos. | 4 |
| 1.3 | Tipos de robots. | 5 |
| 1.4 | Estrategias de control en la robótica. | 6 |
| 1.5 | Robots de servicio para uso profesional. Unidades Vendidas en 2014-2015. | 9 |
| 1.6 | Robots de servicio para uso personal/doméstico. Unidades Vendidas en 2014-2015 y predicciones para 2016-2019. | 9 |
| 1.7 | Robots móviles en aplicaciones de exploración. | 10 |
| 2.1 | Ciclo límite del oscilador de Van Der Pol. | 20 |
| 2.2 | Ciclo límite del modelo de Maginu. | 20 |
| 2.3 | Exponentes de Lyapunov | 23 |
| 2.4 | Atractor caótico de Lorenz. | 23 |
| 2.5 | Atractor caótico de Rössler. | 24 |
| 2.6 | Atractor caótico de Chen. | 24 |
| 2.7 | Atractor caótico de Chua. | 25 |
| 2.8 | Atractor caótico del oscilador Duffing. | 25 |
| 2.9 | Posición de una partícula libre con movimiento Browniano en una dimensión. | 31 |
| 3.1 | Construcción de los grupos considerados para el análisis de Rango Reescalado de Hurst. Imagen extraída de [15]. | 40 |
| 3.2 | Exponente de Hurst como cuantificador de complejidad. Imagen extraída de [15]. | 41 |
| 3.3 | Caminatas de DNA con distintas secuencias de control. Imagen extraída de [55]. | 48 |
| 3.4 | Resultados de la aplicación del DFA a las caminatas de DNA mostradas en la Figura 3.3. Imagen extraída de [55]. | 49 |
| 3.5 | Resumen de los métodos para la caracterización de series temporales. | 58 |
| 4.1 | Mecanismos de locomoción en los robots móviles. | 62 |
| 4.2 | Configuración diferencial como sistema de dirección de un robot móvil con ruedas. | 64 |
| 4.3 | Ilustración de la configuración en el espacio del RMR. | 66 |
| 4.4 | Componentes de aceleración radial (a_{g1}) y tangencial (a_{g2}) que provocan el movimiento del Robot Móvil | 74 |
| 5.1 | Sistema en lazo cerrado para el control de seguimiento. | 85 |
| 5.2 | Diagrama de bloques del controlador de par calculado para el modelo dinámico del RMR. | 87 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.3 | Diagrama de bloques del controlador PD+ para el modelo dinámico del RMR. . | 91 |
| 5.4 | Diagrama de bloques del controlador linealizante por retroalimentación de estados usando geometría diferencial para el modelo dinámico del RMR. | 107 |
| 6.1 | Serie de tiempo periódica senoidal. | 111 |
| 6.2 | Serie de tiempo aleatoria. | 111 |
| 6.3 | Desplazamiento de una partícula Browniana en una dimensión. | 112 |
| 6.4 | Serie temporal del sistema caótico de Lorenz. | 112 |
| 6.5 | Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico de Lorenz. | 117 |
| 6.6 | Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico de Rössler. | 117 |
| 6.7 | Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico de Chen. | 117 |
| 6.8 | Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico de Chua. | 118 |
| 6.9 | Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico del oscilador Duffing. | 118 |
| 6.10 | Referencias para el control de seguimiento generadas por el Modelo Huerta-Cuéllar con régimen caótico. | 118 |
| 6.11 | Referencias para el control de seguimiento generadas por el Modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano. | 119 |
| 6.12 | Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema con dinámica combinada (movimiento Browniano y caos de Chen). | 119 |
| 6.13 | Referencias para el control de seguimiento generadas por un sistema dinámico periódico. | 119 |
| 6.14 | Control de seguimiento en coordenadas de posición local del RMR con la ley de control de <i>par calculado</i> con referencias del sistema caótico de Lorenz. | 120 |
| 6.15 | Control de seguimiento en coordenadas de posición local del RMR con la ley de control de <i>par calculado</i> con referencias del Modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano. | 121 |
| 6.16 | Control de seguimiento en coordenadas de posición cartesiana del RMR con la ley de control <i>linealizante por geometría diferencial</i> con referencias del sistema caótico de Lorenz. | 123 |
| 6.17 | Control de seguimiento en coordenadas de posición cartesiana del RMR con la ley de control <i>linealizante por geometría diferencial</i> con referencias del modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano. | 124 |

Capítulo 1

Introducción

La robótica es una de las áreas de investigación más prominentes y que se ha venido explotando desde hace varios años.

1.1 Motivación

Dentro de la robótica móvil existe una tendencia y necesidad de contar con sistemas que tengan mayor autonomía y que dependan en menor medida de la información del ambiente que los rodea, sin que se vea limitado para la realización de sus tareas.

También es necesario que los robots, al estar en conjuntos homogéneos o heterogéneos se puedan mover coordinadamente sin dificultar su objetivo o funcionalidad. Para enfrentar algunos de estos retos es necesario describir matemáticamente un modelo que asemeje su comportamiento y dinámica, para emplear herramientas de la teoría de control y ejecutar tareas de forma más precisa. En los últimos años, se ha explorado en el campo de la robótica móvil el uso de dinámicas complejas que permiten optimizar tareas en el campo de la inteligencia artificial, específicamente en enjambres de robots y en la sistemas con alta capacidad de adaptabilidad, en la exploración y vigilancia de entornos dinámicos conocidos o desconocidos.

En este trabajo de tesis el interés principal es la aplicación de técnicas que permitan optimizar las tareas de exploración y vigilancia para obtener resultados cuantitativos del área explorada, evaluando impredecibilidad y eficiencia para cada una de las técnicas propuestas.

1.2 Antecedentes

El caos es un fenómeno interesante que muestran los sistemas dinámicos no lineales y que se ha usado en robótica, contrario al comportamiento aleatorio, tiene propiedades interesantes que pueden ser explotadas para las diferentes aplicaciones. Este tipo de dinámica tiene la propiedad de los sistemas caóticos definida como transitividad topológica, lo que asegura nos asegura que las trayectorias serán densas. En aplicaciones de vigilancia, estos sistemas dinámicos hacen más eficiente esta tarea, ya que brindan un mayor grado de impredecibilidad en las trayectorias y así aumentar el rango de posibilidades de atrapar a algún intruso.

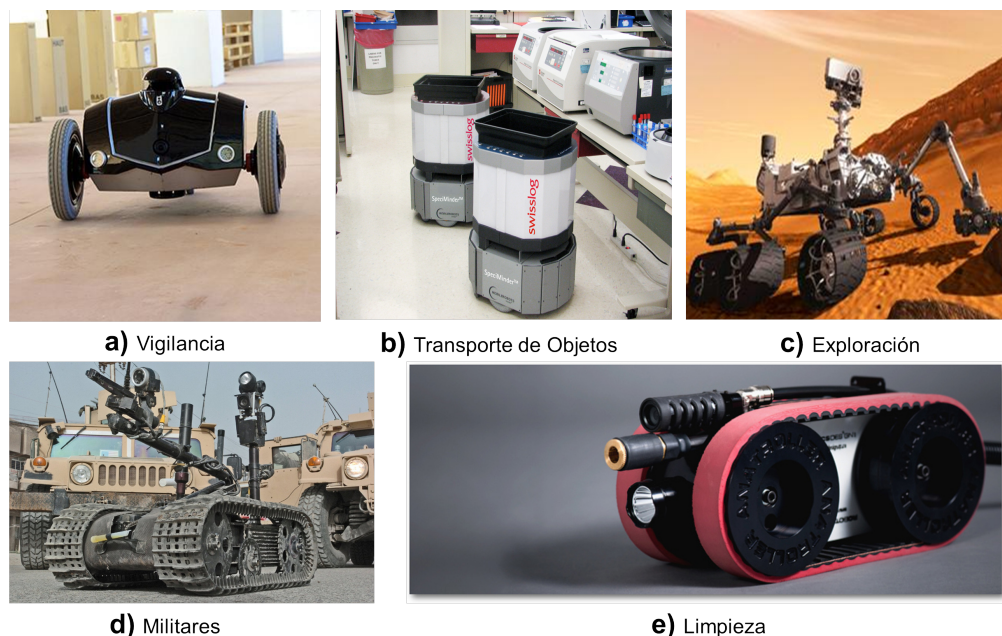


Figura 1.1: Aplicaciones de Robots Móviles.

Por otro lado, el movimiento Browniano, descubierto por el biólogo Robert Brown en 1827 [7], lo definió como un fenómeno natural de aparente naturaleza impredecible y perpetuo. Posteriormente, Thiele describió matemáticamente este fenómeno en su trabajo sobre el método de mínimos cuadrados en 1880 [65], unos años después Bachelier [2] propuso otra alternativa para definir este fenómeno. Albert Einstein [17] dió la primera descripción matemática de una partícula libre con movimiento Browniano, además, Smoluchowski [62] realizó su propia descripción en 1906, y en 1908, Langevin obtuvo un modelo dinámico que consta de una ecuación diferencial de segundo orden con un término estocástico, y fue el modelo más aceptado en la teoría moderna de movimiento Browniano de una partícula libre [40]. Esta dinámica se ha implementado principalmente en enjambres de robots móviles [69, 47, 19, 31, 38] para aplicaciones de búsquedas y exploración, en la cuál cada robot se modela como una partícula Browniana cuyo movimiento es influenciado para generar las trayectorias y realizar búsquedas completas. Sin embargo, en este trabajo se propone el uso de una aproximación determinista [11], que posee las principales propiedades del movimiento Browniano y nos da información precisa y no aleatoria sobre la trayectoria generada. Además, la implementación es sencilla y el movimiento puede ser acotado en una región por medio del modelo dinámico. Esta dinámica posee ciertas propiedades que comprenden irregularidad en su comportamiento. Mandelbrot, quién estudió el movimiento Browniano desde el campo de los fractales, menciona lo siguiente:

“la traza del movimiento Browniano, que es una curva de dimensión con intervalos crecientes indefinidos, que a la larga cubrirá por completo el plano, lo cuál sugiere que eventualmente la traza del movimiento Browniano toma la dimensión del plano”.

Por lo tanto, estos sistemas dinámicos con comportamientos altamente irregulares resultan ser una buena alternativa para hacer exploraciones eficaces en el entorno de los robots móviles.

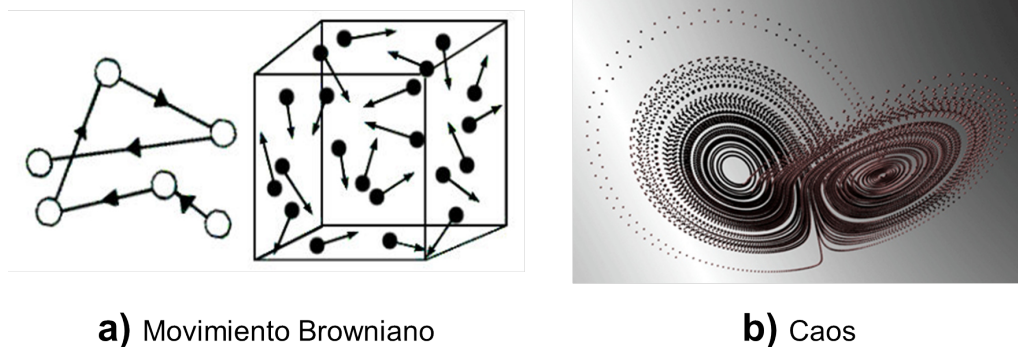


Figura 1.2: Comportamientos irregulares y complejos.

Dado que no es sencillo identificar una trayectoria, es decir, su comportamiento, podría omitirse algún patrón de comportamiento caótico, Browniano, o simplemente ruido, por esta razón es necesario introducir los análisis de series temporales para lograr identificar cada una de las dinámicas que se desean en los robots móviles. Los métodos de análisis de series temporales permitirán encontrar índices que describen cuantitativamente la impredecibilidad, la complejidad e incluso la identificación precisa del tipo de dinámica que será analizada.

A continuación se hace un breve recuento de las principales aportes en las distintas temáticas que serán manejadas en esta tesis, donde se tiene por objetivo ilustrar cómo se ha abordado el problema de exploraciones y vigilancias por medio de robots móviles.

La robótica móvil es una de las áreas de la robótica en las cuáles se ha consolidado en los últimos años como un problema recurrente e ideal para la investigación [30, 50, 14, 45]. Los robots móviles pueden ser clasificados de acuerdo con el área o entorno en el cuál estarán desplazándose, por lo que puede haber robots terrestres, marinos y aéreos. Se tienen los robots móviles terrestres los cuáles poseen principalmente mecanismos de locomoción basados en ruedas ó patas; y sus aplicaciones más comunes son de rastreo y traslado de objetos, vigilancia, exploración, evasión de obstáculos, traslado de instrumental, limpieza del hogar, enjambres de robots, y a nivel industrial se usan en aplicaciones de inspección y análisis.

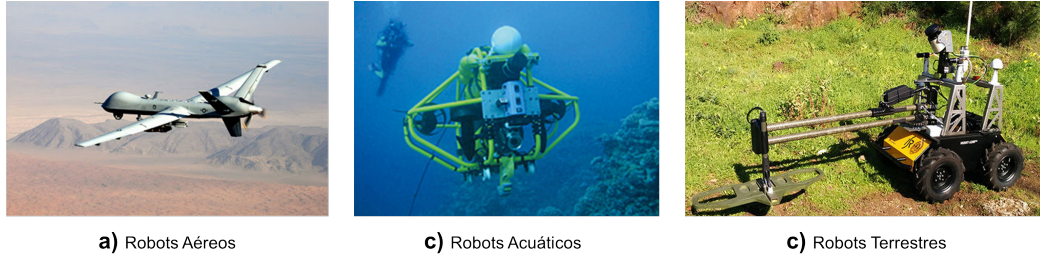


Figura 1.3: Tipos de robots.

En el estado del arte de robots móviles, existen diversos trabajos dedicados al modelado cinemático de estos sistemas [30, 45, 14, 35, 28]; también se realiza el modelado cinemático de sistemas acoplados con distintas arquitecturas de robots móviles [37]; es posible modelar los robots móviles siguiendo una metodología muy parecida a la que normalmente se utiliza en el modelado de robots manipuladores utilizando matrices de transformación homogéneas para determinar las relaciones cinemáticas entre las variables cinemáticas del robot [48, 4].

En los trabajos [37, 58, 3, 70, 42, 56, 57] se aborda el modelado dinámico de robots móviles; en [4] se deduce el modelado dinámico de un robot móvil de configuración diferencial y de tipo uniciclo basándose en la metodología de *Newton-Euler*, haciendo uso del formalismo de Lagrange para considerar la dinámica de los actuadores y así obtiene un modelo dinámico del sistema completo.

Una parte fundamental de este trabajo se basa en las estrategias de control que permiten al robot móvil alcanzar una posición deseada, en la literatura abunda la aplicación de la teoría de control en estos sistemas. Se describen los métodos geométricos [53, 74]; técnicas de control de aproximación lineal [4]; linealización exacta [12], [43]; análisis de controlabilidad [60]; estabilidad en el sentido de Lyapunov [56, 45, 14]; control predictivo [28, 72]; control de regulación [9]; control de seguimiento [63, 54], [75]; control difuso [35], entre otros.

Pueden utilizarse estas herramientas de modelado y control para mejorar las aplicaciones existentes que hacen uso de los robots móviles, en el caso de este trabajo, robots móviles terrestres;

en [13] se conceptualiza realizar el control de un robot móvil para generar comportamiento caótico por medio de una red neuronal artificial, logrando aprovechar las características de este tipo de sistemas dinámicos. Las principales aplicaciones en las cuáles se ha estado trabajando es el mejoramiento de la autonomía [73]; exploración por medio de robots móviles utilizando sistemas caóticos [49, 76]; realización de un análisis comparativo entre los sistemas dinámicos caóticos y aleatorias para determinar que método resulta ser mejor para tarea de cobertura de áreas [25], cabe destacar que se utiliza un método de asignación de posiciones consecutivas, es decir, la exploración no se realiza por medio de trayectorias continuas; se proponen controladores basados en el comportamiento de organismos biológicos que se comportan caóticamente para la generación de trayectorias y evasión de obstáculos en un área [25]; en el campo de la inteligencia artificial, también se investiga cómo los sistemas de percepción del robot al desplazarse en un entorno dinámico presenta un comportamiento caótico, lo que le permite lograr una mejor adaptabilidad [59] y robustez [51] en la navegación de su entorno; la inteligencia emergente por medio de caos [27]; se indaga la idea de utilizar comportamientos caóticos combinados pertenecientes a diferentes sistemas dinámicos para la cobertura de áreas [10]; cooperación aleatoria entre robots móviles basado en sincronización caótica para exploración de áreas [76].

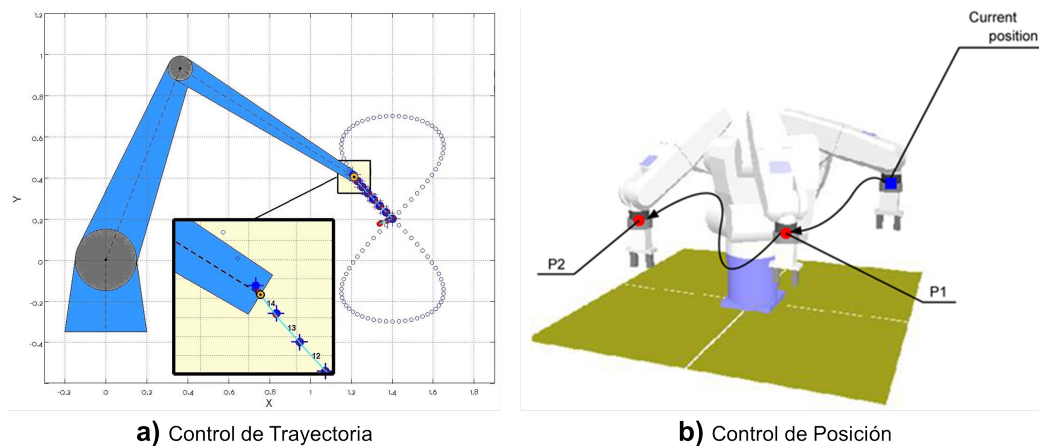


Figura 1.4: Estrategias de control en la robótica.

En aplicaciones para la generación de trayectorias en robots móviles se ha usado como otra

alternativa, los generadores aleatorios de trayectorias como el planeador de trayectorias aleatorio (RPP, por sus siglas en inglés), método de mapeo de caminos probabilístico (PRM, por sus siglas en inglés) y el algoritmo de árbol de exploración aleatoria rápida (RRT, por sus siglas en inglés) [19].

También se emplea otro tipo de dinámica en los robots móviles que posee características interesantes como es el movimiento Browniano, cuya principal rama de aplicación se centra en exploración por medio de enjambres de robots móviles [19, 47]. Cada robot es modelado como una partícula Browniana, la cuál es manipulada por estímulos eléctricos [69], marcadores [47], métodos de campos de potencial artificial [19], en el trabajo [32] menciona la principal característica de los métodos anteriores, la manipulación por medio de campos de fuerzas atractivas para lograr cambios en la trayectoria de una partícula con movimiento Browniano; este tipo de dinámicas también se ha empleado en situaciones donde el ambiente es desconocido y con obstáculos dinámicos [47].

En algunos de los trabajos se estudia el comportamiento emergente de los robots móviles, es decir, al realizar la caracterización de las series de tiempo irregulares de los mecanismos de percepción que se generan debido a la interacción de los robots móviles con su entorno dinámico permite identificar un comportamiento caótico, que inicialmente podría tomarse como movimiento aleatorio, sin embargo, se descubre que esta dinámica compleja le aporta adaptabilidad [59] y robustez [51] a este tipo de sistemas. Por lo tanto, hay una necesidad de conocer y analizar la dinámica que se desea imprimir en estos sistemas, al igual que estudiar los comportamientos que puede generar a través de sus variables cinemáticas, por lo que se hace uso del análisis de series temporales tales como series de Fourier [21]; función de autocorrelación [6]; análisis de densidad espectral [22]; rango reescalado de Hurst [46]; análisis de fluctuación sin tendencia [55]; uso del método de información promedio mutua [20] que complementa el método de los falsos vecinos cercanos [36] permitiendo calcular la dimensión de autocorrelación [23] de la serie temporal y

aportando información útil en el análisis geométrico de la serie temporal, es decir, la reconstrucción del atractor [64]; medición de la impredecibilidad por medio de los exponentes de Lyapunov [71], etc.

Actualmente, se realiza investigación exhaustiva en el área de la robótica, la mayoría de los avances tecnológicos hasta hace unos años estaban orientados en el sector industrial, sin embargo, otros sectores como en el área de seguridad, donde se necesita una constante supervisión de los complejos o áreas de interés; en el hogar, donde se tengan robots que puedan desempeñar tareas de limpieza; navegación en zonas de riesgo, donde no sea posible la intervención ó que este presente un riesgo para los seres humanos, como en casos de derrumbes, zonas radioactivas, campos de minas, entre otros.

El desarrollo de la robótica y la necesidad de satisfacer algunas de las necesidades planteadas ha traído nuevos paradigmas para la investigación. Las necesidades que se desean cubrir mediante este tipo de robots es la capacidad de tener una mayor autonomía e inteligencia para satisfacer tareas específicas. El término de autonomía hace referencia a la capacidad del robot para responder ante situaciones cambiantes ambiguas o impredecibles sin necesidad de la supervisión humana. Estos robots han significado un importante avance en el campo de la robótica de enjambres en dónde se propone el uso de múltiples robots para la realización coordinada de tareas de exploración, coordinación de robots, transporte de objetos, etc. Surge la necesidad de encontrar estrategias que permitan realizar estas tareas de forma más eficiente. De acuerdo a los datos estadísticos de la *International Federation of Robotics* (IFR). En las figuras 2.4 y 2.5 se muestra que el desarrollo de la robótica móvil representa de las áreas de mayor crecimiento, lo que se correlaciona con el desarrollo de aplicaciones más eficientes en robots móviles y la demanda en el sector doméstico que es una tendencia que proyecta crecimiento para años posteriores.

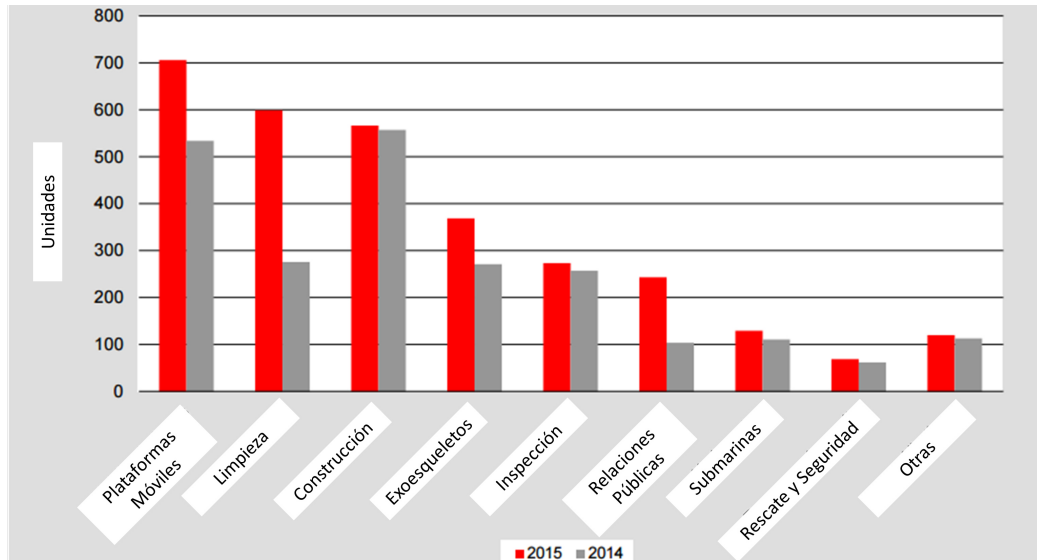


Figura 1.5: Robots de servicio para uso profesional. Unidades Vendidas en 2014-2015.

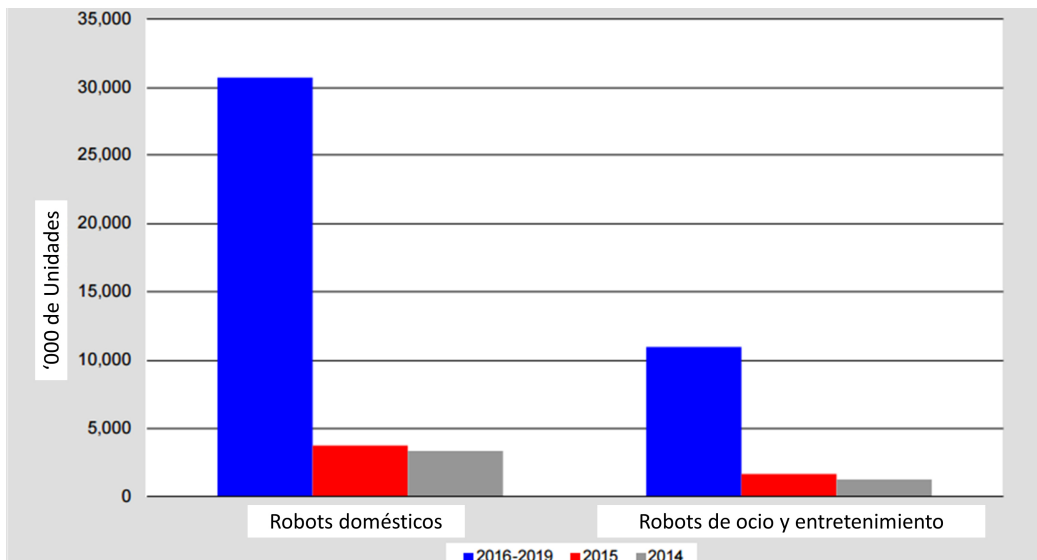


Figura 1.6: Robots de servicio para uso personal/doméstico. Unidades Vendidas en 2014-2015 y predicciones para 2016-2019.

La exploración de entornos desconocidos es una de las aplicaciones con mayor desarrollo y avances en la robótica móvil. La misión emprendida por la NASA para la exploración de marte [68, 67] sigue vigente desde el 2004 y se utilizaron robots móviles altamente especializados con manipuladores, el Spirit y el Opportunity. La tarea principal de estos robots fue la exploración

de la superficie de marte, así como también, la transmisión de datos que son estudiados por un equipo de geólogos. Lo que sugiere que este tipo de robots explorar y supervisar hasta los ambientes más remotos e inaccesibles para el ser humano.

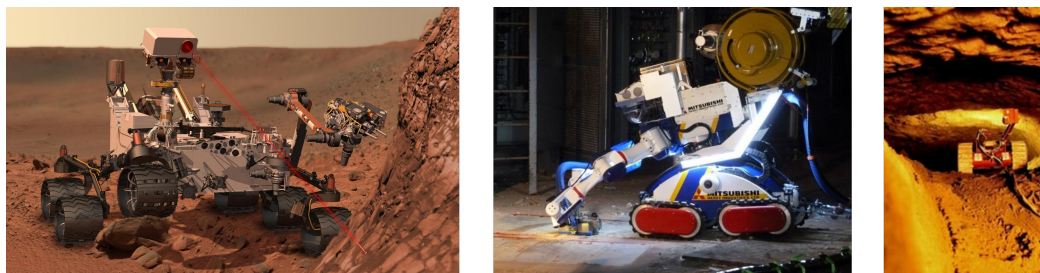


Figura 1.7: Robots móviles en aplicaciones de exploración.

Para hacer estas tareas con un alto grado de precisión se recurren al modelado de sistemas, de tal modo que sea posible describir matemáticamente el sistema, implementar la teoría de control e inteligencia al robot móvil.

En años recientes se ha descubierto que al imprimir un comportamiento dinámico complejo en estos sistemas robóticos se aumenta de manera significativa la eficiencia de éstos, principalmente en las aplicaciones de evasión de obstáculos, coordinación de múltiples robots móviles, inteligencia emergente debido a este comportamiento errático que da paso a la adaptabilidad, coberturas y vigilancia de áreas. Tales dinámicas complejas comprenden los comportamientos caóticos, movimientos de carácter aleatorio como el movimiento Browniano, entre otros. Sin embargo, en la exploración se encontró que los métodos aleatorios resultan ser menos eficientes que los comportamientos caóticos, lo que dejó abierto el problema a la búsqueda de mejores alternativas para mejorar esta aplicación y por esta razón, en este trabajo se propone el uso de un nuevo esquema que permite generar trayectorias de movimiento Browniano con una aproximación determinista.

De este modo, las dos dinámicas que se estudiarán en este trabajo nos aseguran trayectorias densas, impredecibilidad en los movimientos del robot móvil y en una menor cantidad de

tiempo, haciendo más eficientes las aplicaciones de exploración y vigilancia. Cabe mencionar que también es necesario seleccionar las mejores estrategias de control para el seguimiento de estas trayectorias, por lo que es necesario buscar el control de seguimiento preciso. Sin embargo, las dinámicas parecen ser parecidas, tienen un comportamiento errático, a simple vista aleatorio, lo que lleva a plantear el uso de métodos de análisis de series de tiempo que permita caracterizar la dinámica de las trayectorias que son generadas por el robot móvil, de este modo se comprueba con una base más sólida que comportamiento se encuentra presente en el comportamiento del robot móvil al realizar tareas de exploración.

1.3 Hipótesis

El uso de los diferentes modelos dinámicos para la generación de trayectorias con dinámica caótica, movimiento Browniano determinista y dinámicas combinadas, junto con estrategias de control en las variables de posición cartesiana del robot móvil, permite encontrar mejores alternativas para realizar aplicaciones de exploración y vigilancia de áreas que mediante trayectorias periódicas o aleatorias.

1.4 Objetivos de la Tesis

- Desarrollar una herramienta para la caracterización de series de tiempo.
- Selección de las mejores trayectorias de referencias y estrategias de seguimiento para la cobertura del área, que permita realizar exploraciones más eficientes por medio de un robot móvil de configuración diferencial.
- Realizar el seguimiento de trayectorias en variables de orientación y desplazamiento y en variables de posición cartesiana.

- Generación de trayectorias con comportamiento caótico y de movimiento Browniano determinista.
- Implementación experimental en un robot móvil.

1.5 Organización de la Tesis

El resto del documento está organizado de la siguiente forma:

Capítulo 2. Se estudian sistemas dinámicos que generan trayectorias caóticas y de movimiento Browniano, donde se explican sus definiciones y propiedades que las hacen atractivas para las aplicaciones que se plantean en los objetivos de la tesis. También se incluye una sección donde se realiza el escalamiento en amplitud y frecuencia para facilitar la implementación experimental, que se aborda en el capítulo 6.

Capítulo 3. Se describe las componentes básicas de los robots móviles como sus arquitecturas y sistemas de tracción. También se estudia brevemente las relaciones no holonómicas que se encuentran presentes en estos sistemas y que determinan o restringen su movimiento. Posteriormente se realiza el modelado cinemático y dinámico de un robot móvil de configuración diferencial, de tipo unicycle.

Capítulo 4. Se estudian las metodologías para el control de robots móviles, donde se utiliza control de seguimiento (trayectorias continuas), al igual que se analiza la estabilidad y controlabilidad del sistema con las estrategias de control implementadas.

Capítulo 5. Se muestran resultados del control de seguimiento, análisis y caracterización de la dinámica de las trayectorias y el porcentaje de cobertura de áreas para obtener los mejores esquemas o metodologías en aplicaciones de exploración a partir de las simulaciones computacionales.

Finalmente, se muestran las conclusiones y el trabajo a futuro del tema de investigación de esta tesis.

Capítulo 2

Sistemas Generadores de Trayectorias

2.1 Introducción

En este capítulo se definen los sistemas dinámicos que sirven para generar las trayectorias que serán seguidas por los robots móviles. Se definen los sistemas dinámicos que exhiben caos, patrones periódicos, aleatorios, entre los que se encuentra el movimiento Browniano y la aproximación que se implementa para la generación de trayectorias Brownianas deterministas.

2.2 Sistemas Dinámicos

La *dinámica* se relaciona con los fenómenos que producen patrones de cambio en el tiempo. Gran parte de éstos fenómenos ocurren en la naturaleza y los procesos. Algunos ejemplos de éstos fenómenos dinámicos se presentan en los sistemas sociales, los ecosistemas, procesos industriales, etc.

Muchos de estos fenómenos pueden entenderse y ser tratados fácil e intuitivamente sin el conocimiento de la teoría de sistemas dinámicos. Sin embargo, hay situaciones donde es necesario analizar el problema mediante herramientas matemáticas más sofisticadas. Los modelos basados

en ecuaciones diferenciales ordinarias proveen una abstracción y descripción más exacta de la dinámica de los fenómenos naturales y artificiales.

Los modelos dinámicos son estudiados como objetos matemáticos que describen un sistema real, los cuales son abstraídos de algún procesos físico, biológico, económico, etc. Particularmente, en el estudio de los sistemas dinámicos se considera que un modelo matemático es determinista sí exhibe una evolución única [5]. Una especificación completa del estado inicial de éstas ecuaciones está dada por las condiciones iniciales.

Se consideran que un sistema dinámico representador por un modelo en espacio de estados está conformador por un número finito de n -ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas entre sí, que se representan con la ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

donde \dot{x}_i denota la derivada de x_i con respecto a la variable de tiempo t , x_i es un vector cuyas n componentes son las variables de estado, y u_j es un vector de entrada m -dimensional.

Se escriben como una ecuación vectorial n -dimensional de primer orden,

$$\dot{x} = f(t, x, u)\tag{2.2.2}$$

donde se define a x como el estado y u es la entrada.

Cuando no aparece explícitamente una entrada u en el modelo en espacio de estado, se le llama ecuación de estado no forzada

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.2.3)$$

Un caso especial de (2.2.3) surge cuando la función f no depende explícitamente del tiempo t , esto es,

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2.4)$$

en tal caso se dice que el sistema es autónomo o invariante en el tiempo [26]. Si el sistema no es autónomo, entonces es llamado no autónomo o variante en el tiempo.

En el caso autónomo, la solución del problema del valor inicial de la ecuación (2.2.3), se sabe que existe y que es única si el vector de campo f es *continuamente Lipschitz* 5.5.3. Al resolver la ecuación anterior se tiene una secuencia de puntos $x(t)$ que se define como la trayectoria del sistema dinámico, donde $x(0)$ es la condición inicial.

Definición 2.2.1 (Constante Lipschitz). [18] Una función f de $S \subset \mathbb{R}^m$ en \mathbb{R}^n se le llama **función Lipschitz** si hay una constante L_f tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_f \|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in S \quad (2.2.5)$$

La **constante de Lipschitz** de f es la más pequeña elección de L_f para la cual la condición previa se mantiene.

Definición 2.2.2 (Función Lipschitz [18]). Sea una función general $f: S \rightarrow \mathbb{Q}$, donde S es un conjunto de número racionales, en un intervalo de $\{x \in \mathbb{Q}: a \leq x \leq b\}$ con los números racionales a y b . Si x y y son dos números en S , entonces $|x_2 - x_1|$ es el cambio en la entrada y $|f(x_2) - f(x_1)|$ es el correspondiente cambio en la salida. Se dice que f es *Lipschitz continua* con una *constante Lipschitz* L_f en S si hay una constante (necesariamente positiva) L_f tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_f \|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in S \quad (2.2.6)$$

como se indica por la notación, la *constante Lipschitz* L_f depende de la función f .

Las trayectorias típicas tienden a infinito mientras evolucionan en el tiempo o se quedan acotadas en un área para siempre. El comportamiento observado depende tanto de la forma de f como de la condición inicial x_0 ; muchos sistemas permiten ambos tipos de solución. El conjunto de condiciones iniciales que nos lleva al mismo comportamiento asintótico de la trayectoria se le conoce como *región de atracción*.

Los sistemas dinámicos que se analizan en este trabajo no sólo tienen soluciones acotadas, si no que usualmente también son disipativos, lo cuál significa, que el promedio de un volumen del espacio de fase que contiene sus condiciones iniciales está contraído bajo la dinámica del sistema.

Una de las características más importantes de los sistemas dinámicos utilizados en este trabajo es la *continuidad*, por lo tanto, las ecuaciones diferenciales que componen el sistema dinámico son *funciones continuas* y su definición es la siguiente.

Definición 2.2.3. [44] Una función f que mapea un conjunto S_1 en un conjunto S_2 se denota como $f : S_1 \rightarrow S_2$. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es continua en un punto x si $f(x_k) \rightarrow f(x)$ siempre y cuando $x_k \rightarrow x$. Equivalentemente, f es continua en x si, dado un $\epsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \epsilon \quad (2.2.7)$$

2.2.1 Estados de equilibrio

Otro de los conceptos de amplia importancia a considerar en el análisis de los sistemas dinámicos es el *punto de equilibrio*.

Definición 2.2.4 (Punto de Equilibrio). [44] Un punto $x = x^*$ en el espacio de estados es un *punto de equilibrio* (PE) de (2.2.3) si tiene la propiedad de que siempre y cuando el estado del sistema empiece en x^* y permanezca en x^* para todo tiempo futuro.

Para el sistema autónomo (2.2.4) los PE son las raíces reales de la ecuación

$$f(x) = 0 \quad (2.2.8)$$

Un PE puede estar aislado; es decir, no siempre hay otros PE en su vecindad o podría haber un continuo de ellos.

2.3 Sistemas Dinámicos No Lineales

Los sistemas no lineales son un caso más complejo en donde no se mantiene el *principio de superposición* y es necesario emplear herramientas matemáticas de análisis de mayor complejidad. Los sistemas no lineales pueden ser analizados aplicando una linealización, siempre y cuando sea posible utilizarla, sin embargo, existen algunas limitaciones entre las cuáles se pueden destacar las siguientes:

- Al aplicar la linealización, sólo se puede analizar el comportamiento del sistema alrededor de una vecindad del *punto de equilibrio*, por lo tanto, sólo se predice el comportamiento local del sistema.
- La dinámica de un sistema no lineal es mucho más rica que la dinámica de un sistema lineal.

Es por esta razón que los sistemas no lineales son los más interesantes, desde el punto de vista de este trabajo, para que sean utilizados como sistemas generadores de trayectorias.

Existen fenómenos no lineales que sólo pueden presentarse en este tipo de sistemas, lo que sugiere que los sistemas lineales no son capaces de predecir su comportamiento y por eso debe recurrirse a los sistemas no lineales. Algunos ejemplos de comportamientos de los sistemas no lineales son:

- Escape en tiempo finito.
- Múltiples puntos de equilibrio aislados.

- Ciclos límite.
- Oscilaciones subarmónicas, armónicas y cuasiperiódicas.
- Caos.
- Múltiples modos de comportamiento.

Los sistemas dinámicos no lineales descritos por (2.2.4) presentan *estados de equilibrio* con características diferentes que el *estado de equilibrio* en un sistema lineal dado por $\dot{x} = Ax$, los *estados de equilibrio* son llamados atractores de un sistema, definidos como:

Definición 2.3.1 (Atractor). [41] El conjunto cerrado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es llamado el atractor del sistema (2.2.4) si (a) existe un conjunto abierto $\Omega_0 \supset \Omega$ tal que todas las trayectorias $x(t)$ del sistema (2.2.4) originadas en Ω_0 están definidas para todo $t \geq 0$ y tienden a Ω cuando $t \rightarrow \infty$, esto es, $dist(x(t), \Omega) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, si $x(0) \in \Omega_0$, donde $dist(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$ es la distancia¹ del punto x al conjunto Ω , y (b) subconjuntos de Ω no tienen esta propiedad.

En otras palabras, es llamado *atractor* porque si está presente alguna forma de amortiguamiento en el sistema no lineal, conforme el estado transitorio decae, el sistema es "atraído" al conjunto Ω . Los atractores en los sistemas no lineales se pueden clasificar como:

1. Punto de equilibrio.
2. Órbita periódica o ciclo límite.
3. Órbita cuasiperiódica.
4. Atractor caótico.

¹ $\|\cdot\|$ indica la norma Euclídeana, y $\|\cdot\|_\infty$, la norma infinita en los espacios de vectores y funciones. El espacio Euclídeano de los vectores n -dimensionales se denota por \mathbb{R}^n .

2.4 Sistema Dinámico Periódico

La periodicidad se caracteriza por poseer una repetitividad continua, en las trayectorias se aprecia la misma forma de la curva, cuando se relacionan intervalos específicos de tiempo. Los patrones periódicos también son conocidos como ciclos límite.

Definición 2.4.1 (Ciclos límite). [26] Un sistema oscila cuando tiene una solución periódica no trivial,

$$x(t + T) = x(t), \quad t \geq 0 \quad (2.4.1)$$

para algún $T > 0$. La imagen de una solución periódica en el retrato de fase es la de una órbita periódica o una órbita cerrada.

Un sistema lineal como oscilador armónico tiene trayectorias que son órbitas cerradas, cuya amplitud depende de la condición inicial. Sin embargo, un oscilador lineal no es robusto (estructuralmente estable) ya que cualquier perturbación destruye la oscilación. Por medio de *sistemas no lineales* es posible construir osciladores tales que,

- Sean estructuralmente estables.
- La amplitud de la oscilación (en régimen permanente) no dependa de la condición inicial.

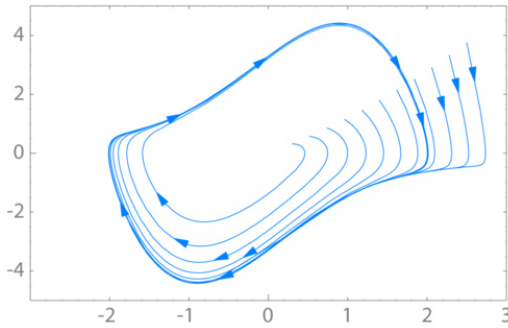


Figura 2.1: Ciclo límite del oscilador de Van Der Pol.

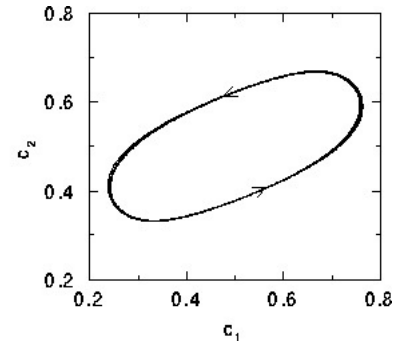


Figura 2.2: Ciclo límite del modelo de Maginu.

Este tipo de sistemas dinámicos son ampliamente generados por series de funciones senoidales. En la Figuras 2.1 y 2.2 se muestran algunos ejemplos de los ciclos límite de los modelos con comportamientos dinámicos periódicos.

2.5 Sistemas Dinámicos Caóticos

La idea de como pequeñas desviaciones pueden crecer explosivamente hasta producir efectos substanciales en el comportamiento de sistemas físicos fue un fenómeno en la investigación de Edward Lorenz (1963). Él notó que un modelo climatológico puede exhibir una dependencia a la sensibilidad de algún cambio en las condiciones iniciales y no es producto de una errónea descripción matemática.

El *caos* es impredecible, pero determinable. O dicho de otro modo, el caos no es aleatorio, tiene un orden subyacente. La incógnita de la definición de caos es la pregunta de qué es lo que hace que un sistema dinámico sea caótico o no caótico.

Definición 2.5.1 (Definición de Caos de Devaney). [16] Sea $f : X \rightarrow X$. Decimos que f es caótica en X si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- El conjunto de puntos periódicos de f forma un conjunto denso en X .
- f es topológicamente transitiva en X
- f es sensible a las condiciones iniciales en X .

Una de las propiedades más ampliamente aceptadas en la definición del caos es la *transitividad topológica* [1]. Esta propiedad describe matemáticamente que un sistema dinámico de naturaleza caótica genera trayectorias densas en su espacio de fase. Algunas definiciones útiles para expresar formalmente lo anterior son:

Definición 2.5.2. (X, f) denota un sistema dinámico topológico, donde X es un espacio métrico (compacto) con una métrica d y $f : X \rightarrow X$ es un mapeo continuo.

Definición 2.5.3. Un punto $x \in X$ mueve su trayectoria siendo la secuencia $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$, donde $f^n(x)$ es la n -ésima iteración de f . El punto $f^n(x)$ es la posición de x después de n unidades de tiempo. El conjunto de puntos de la trayectoria de x en f es llamada la órbita de x denotada por $orb_f(x)$

Una vez que se han definido algunos conceptos útiles sobre los sistemas dinámicos y sus propiedades topológicas, los cuales son importantes para describir de forma más precisa el concepto de transitividad topológica que esta dado por la siguiente definición.

Definición 2.5.4. Sea X un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ continua. Se consideran las siguientes condiciones:

- Para cada par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \in X$ hay un entero positivo n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,
- hay un punto $x_0 \in X$ tal que la órbita de x_0 es densa en X .

Usualmente la primera condición de 2.5.4 se adopta como la definición de transitividad topológica, aunque otros autores toman la segunda condición. La transitividad topológica es una característica global del sistema dinámico. Intuitivamente, un mapeo topologicamente transitivo f tiene puntos con vecindades arbitrariamente cercanas, tales que al transcurrir las iteraciones, eventualmente su trayectoria los mueve a cualquier otra vecindad.

Otras características muy significativas que poseen los sistemas caóticos son las siguientes:

- Sensibilidad a los cambios en las condiciones iniciales. En la Figura 2.3 se observa este fenómeno de divergencia exponencial entre dos trayectorias que empiezan muy cercanas entre sí en una vecindad y conforme evolucionan temporalmente divergen significativamente.
- Incremento de la complejidad de oscilaciones al cambiar algún parámetro de las ecuaciones dinámicas.
- Presenta atractores “extraños” que se muestran en el espacio de fase o con los mapas de Pincaré, y presentan una estructura fractal.

- Espectro amplio de sus frecuencias, se obtiene al aplicar la transformada rápida de Fourier (FFT) en la serie temporal caótica.

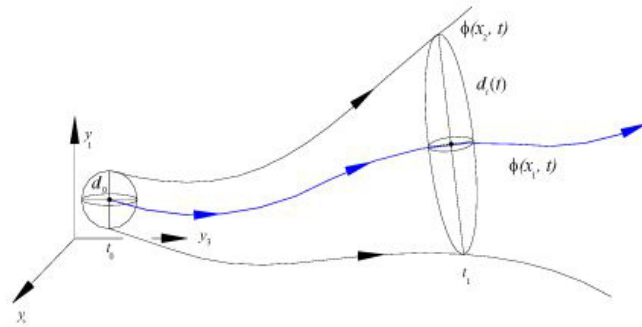


Figura 2.3: Exponentes de Lyapunov

Algunos sistemas bien conocidos que nos permiten generar trayectorias caóticas son, por ejemplo, el sistema de ecuaciones del modelo de Lorenz para la convección en fluidos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y + xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

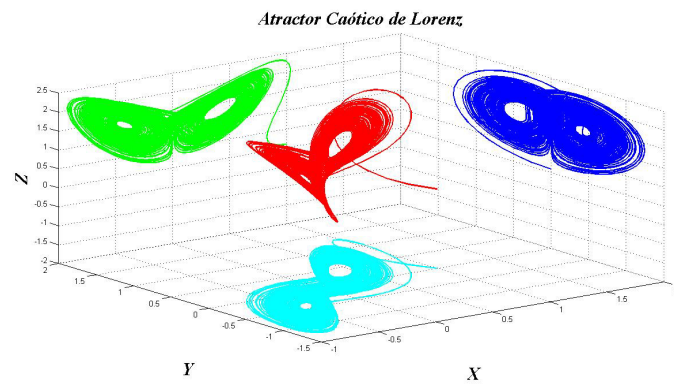


Figura 2.4: Atractor caótico de Lorenz.

Algunos otros ejemplos de sistemas caóticos son:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= -(y - z) \\
 \frac{dy}{dt} &= x + ay \\
 \frac{dz}{dt} &= b + xz - cz
 \end{aligned}
 \tag{2.5.2}$$

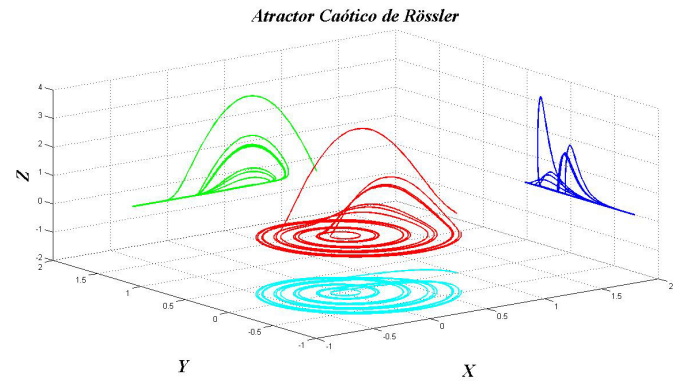


Figura 2.5: Atractor caótico de Rössler.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= a(y - x) \\
 \frac{dy}{dt} &= (c - a)x - xz + cy \\
 \frac{dz}{dt} &= xy - bz
 \end{aligned}
 \tag{2.5.3}$$

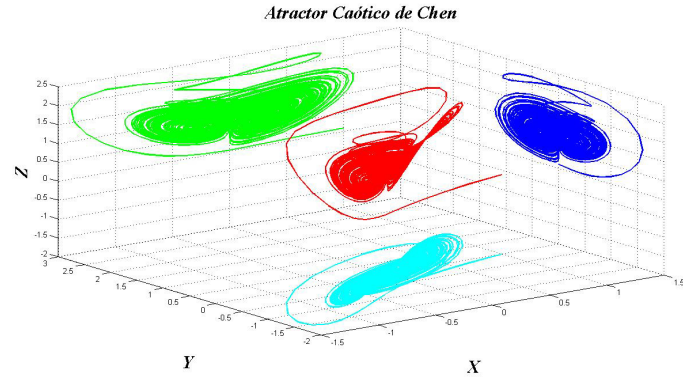


Figura 2.6: Atractor caótico de Chen.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x - h)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y$$

$$h = m_1 x + 1/2(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|) \quad (2.5.4)$$

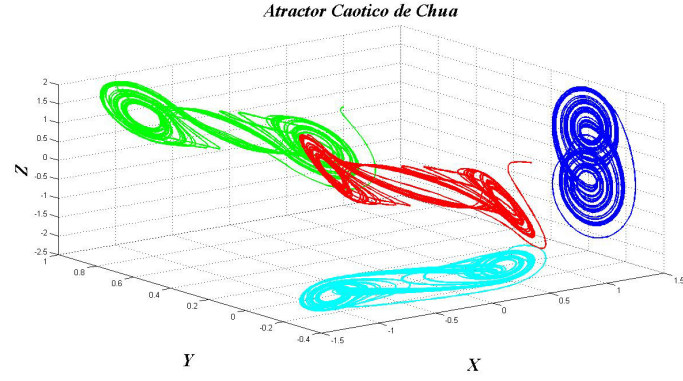


Figura 2.7: Atractor caótico de Chua.

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y - \alpha x - \beta x^3 + F \cos(z) \quad (2.5.5)$$

$$\frac{dz}{dt} = -w$$

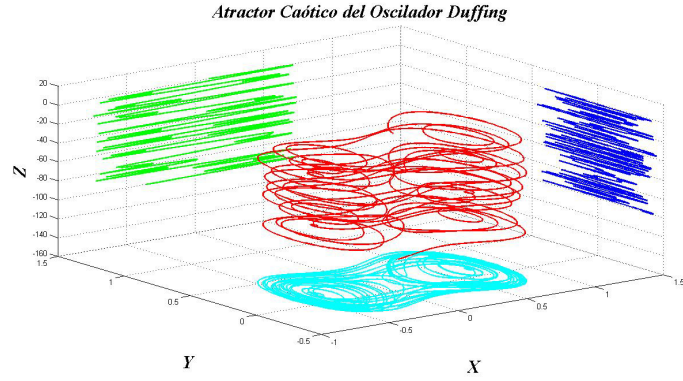


Figura 2.8: Atractor caótico del oscilador Duffing.

2.6 Movimiento Browniano

En 1827, Robert Brown demostró que cualquier suspensión de partículas finas de vidrio y minerales presentaban un movimiento irregular conocido como *movimiento Browniano*.

El *movimiento Browniano* se genera debido a ciertas suposiciones estocásticas que provienen de los eventos de las colisiones entre las partículas y las moléculas del líquido que las rodean. El movimiento Browniano posee las siguientes propiedades, mismas que presentan los *procesos de Wiener*:

Propiedades:

- Trayectorias continuas.
- Estacionariedad e incrementos independientes.
- $W(t) \approx N(0, t)$ para cada $t \geq 0$.

2.6.1 Ecuación de Langevin para el Movimiento Browniano

El movimiento Browniano revela claramente las fluctuaciones estadísticas que ocurren en un sistema en equilibrio térmico [39]. Langevin propuso una solución mas simple para describir el movimiento Browniano, describiéndolo con una ecuación diferencial estocástica.

Se considera el caso más simple, unidimensional, para una partícula de masa m cuyo centro de masa en un tiempo t está designada por $x(t)$ y cuya velocidad es $v = dx/dt$. Esta partícula está inmersa en un liquido a temperatura absoluta T . Tratar de describir la interacción de la partícula con los grados de libertad del líquido que la rodea es una tarea muy complicada, pero el efecto de todos estos grados de libertad se simplifica como una fuerza neta efectiva $F(t)$ sobre la partícula. Además, la partícula interactúa con otras fuerza externas, tales como la gravedad o campos electromagnéticos, a través de una fuerza denotada por $\mathcal{F}(t)$ y usando la segunda ley de Newton se describe como:

$$m \frac{dv}{dt} = \mathcal{F}(t) + F(t), \quad (2.6.1)$$

la fuerza $F(t)$ describe la interacción de $x(t)$ con los demás grados de libertad del sistema. La fuerza $\mathcal{F}(t)$ depende de las posiciones de las partículas en constante movimiento. Por lo tanto, $F(t)$ es una función que fluctúa rápidamente en el tiempo y varia de una forma irregular. Estadísticamente, esta fuerza se considera como un ensamble de muchos sistemas similares, cada uno consta de una partícula y el medio que la rodea. Para cada uno de estos sistemas la fuerza $F(t)$ es una función aleatoria de t , lo cual implica que sólo se pueden hacer consideraciones

estadísticas del ensamble. Entonces, la razón a la cual varia $F(t)$ se caracteriza por un “tiempo de correlación” τ^* , el cual mide el tiempo promedio entre dos máximos (o mínimos) sucesivos de la función fluctuante $F(t)$, el cual es muy pequeño, generalmente es del orden de la separación intermolecular media dividida por la velocidad molecular media). La fuerza $F(t)$ puede ser tanto positiva como negativa de tal forma que su promedio de ensamble es cero.

$F(t)$ es una función que fluctúa rápidamente, por (2.6.1) se deduce que v también es una función fluctuante en el tiempo. La función v tiene una parte que varia lentamente (su promedio) y otra que fluctúa rápidamente (v'), cuyo promedio es cero,

$$v = \bar{v} + v' \quad (2.6.2)$$

La parte que varia lentamente \bar{v} es crucial para determinar el comportamiento de la partícula en grandes periodos de tiempo. Para conocer su dependencia se integra la ecuación (2.6.1) sobre el intervalo de tiempo τ y se obtiene

$$m[v(t + \tau) - v(t)] = \mathcal{F}(t)\tau + \int_t^{t+\tau} F(t') dt', \quad (2.6.3)$$

donde se supone que \mathcal{F} es una función que varia lentamente, de tal forma que su cambio es despreciable durante el tiempo τ . La integral en (2.6.3) resulta muy pequeña, por lo que queda como:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \mathcal{F}. \quad (2.6.4)$$

La interacción con el ambiente expresada por F , debe ser tal que tienda a conducir la partícula al estado de equilibrio. Este estado de equilibrio se define como $\bar{v} = 0$. Se supone que la fuerza

externa $\mathcal{F} = 0$, por lo tanto, la interacción expresada por F es tal que, si al tiempo inicial $\bar{v} \neq 0$, provoca que \bar{v} se aproxime gradualmente a su posición de equilibrio $\bar{v} = 0$. F es afectada por el movimiento de la partícula ya que contiene una parte que varía lentamente \bar{F} que tiende a llevar la partícula al equilibrio. Por lo que análogamente, (2.6.2) se escribe como

$$F = \bar{F} + F', \quad (2.6.5)$$

donde F' es la parte de F que fluctúa rápidamente cuyo promedio es cero y \bar{F} es la parte que varía lentamente, que debe ser alguna función de \bar{v} tal que $\bar{F}(\bar{v}) = 0$, cuando $\bar{v} = 0$. Si \bar{v} no es muy grande, $\bar{F}(\bar{v}) = 0$ se desarrolla como una serie de potencias de \bar{v} . Entonces \bar{F} tiene la forma general de

$$\bar{F} = -\alpha\bar{v}, \quad (2.6.6)$$

donde α es una constante positiva (llamada “coeficiente de fricción”) está acompañada por el signo negativo que expresa que la fuerza \bar{F} tiende a reducir \bar{v} a cero mientras el tiempo transcurre. La fuerza de fricción es causada por la interacción descrita por $F(t)$ y la contribución de α , entonces (2.6.3) se escribe como

$$m \frac{dv}{dt} = \mathcal{F} - \alpha v + F'(t), \quad (2.6.7)$$

donde la aproximación $\alpha\bar{v} \approx \alpha v$ tiene un error despreciable (ya que $\alpha v'$ puede ser despreciado si se compara con $F'(t)$). Introduciendo $\gamma \equiv \alpha/m$ y la fuerza fluctuante por unidad de masa $A_f(t) \equiv F'(t)/m$ (llamada también *fuerza de Langevin*) en (2.6.7) se obtiene

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{\mathcal{F}}{m} + A_f(t), \quad (2.6.8)$$

esta ecuación difiere de (2.6.3) por la descomposición explícita de $F(t)/m$, en su parte que varia lentamente $-\gamma v$ y la parte fluctuante $A_f(t)$, la cual es una función aleatoria con promedio igual a cero. Si se considera que la fuerza externa $\mathcal{F} = 0$ en (2.6.8) se obtiene finalmente la “ecuación de Langevin”.

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + A_f(t), \quad (2.6.9)$$

2.6.2 Aproximación para generar Movimiento Browniano Determinista

La idea de movimiento Browniano determinista ha sido discutida en hidrodinámica y en reacciones químicas oscilatorias, donde a pesar de que sólo se observaba un comportamiento errático o aleatorio en su evolución temporal, el movimiento es completamente determinista y que fue definido como caos microscópico. A partir del descubrimiento de indicios de caminata aleatoria [22] en los osciladores caóticos, se propusieron aproximaciones [66] basadas en generadores no lineales de números pseudo-aleatorios.

En este trabajo se usa una aproximación determinista de *movimiento Browniano* propuesta por [11], donde su modelo se deriva a partir de la *ecuación de Langevin* (2.6.9), que describe la dinámica de una partícula libre con movimiento Browniano.

Dicha aproximación considera que la variación de la aceleración de la fluctuación (A_f) es extremadamente rápida en comparación con la variación de la velocidad de la partícula (\dot{x}), por lo tanto, existe un intervalo Δt durante el cuál podría decirse que la variación de $\dot{x}(t)$ con

respecto a la de $\dot{x}(t + \Delta t)$ es insignificante y se sigue que la *ecuación de Langevin* se puede reescribir como un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\gamma y + A_f(t),\end{aligned}\tag{2.6.10}$$

agregando una grado de libertad adicional al sistema fenomenológico descrito en la ecuación (2.6.10), se asigna a la aceleración de la fluctuación (A_f) la variable z y se obtiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales, para finalmente obtener la aproximación determinista, representada por un modelo disipativo inestable que genera movimiento Browniano [11]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\gamma y + z \\ \dot{z} &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4\end{aligned}\tag{2.6.11}$$

El modelo (2.6.11) no depende de un término estocástico, sino de la posición, velocidad, y la aceleración, por lo tanto, es determinista. Los términos $\alpha_{1,2,3}$ de la ecuación son valores constantes y α_4 es calculado por medio de la ecuación:

$$\alpha_4 = C_1 \cdot \text{round}(x/C_2)\tag{2.6.12}$$

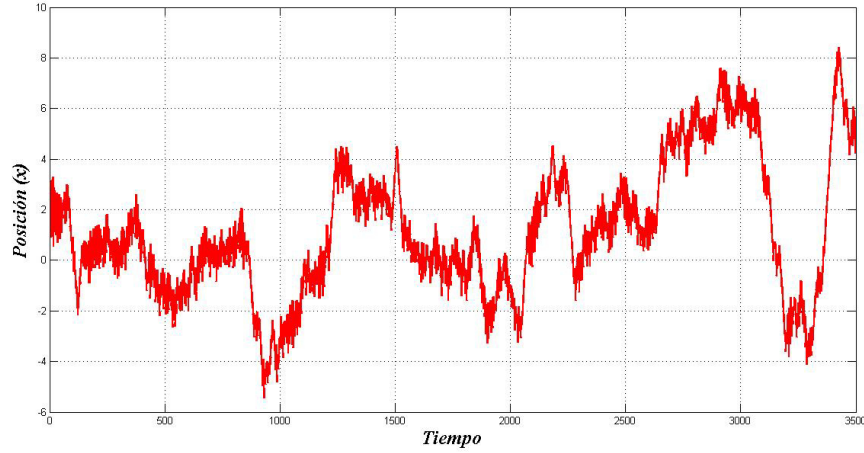


Figura 2.9: Posición de una partícula libre con movimiento Browniano en una dimensión.

Haciendo una revisión de los diferentes sistemas dinámicos, se considera de mayor interés los sistemas no lineales, por la riqueza de su comportamiento como generadores de trayectorias de referencias, además, se mencionan los sistemas que describen trayectorias periódicas, a fin de comparar las diferencias, ventajas y desventajas en la tareas de exploración y vigilancia del RMR.

En la literatura abundan diversos trabajos que sugieren manejar comportamientos de *caos* y *movimiento Browniano*, que pertenecen a los sistemas no lineales, con el propósito de aumentar la autonomía, inteligencia, adaptabilidad y eficiencia en las distintas aplicaciones que desempeñan los robots móviles.

Cabe destacar que se utilizan sistemas dinámicos con ecuaciones puramente deterministas, no hay espacio a la aleatoriedad, comúnmente presente en los modelos que generan *movimiento Browniano*, lo que permite facilitar la implementación de las tareas de control orientadas a las aplicaciones de interés en este trabajo. Sin embargo, los comportamientos generados pueden ser confundidos como ruido debido su comportamiento errático e irregular, por tal motivo, en el siguiente capítulo se describen y se exploran diversos análisis para una caracterización más precisa de la dinámica presente en las trayectorias resultantes de la implementación en el RMR.

Capítulo 3

Caracterización de Series de Tiempo

3.1 Introducción

En este capítulo se abordan métodos para la caracterización de series temporales, que son de ayuda para identificar correctamente la dinámica presente en las trayectorias, por ejemplo la periodicidad, caos, caminata aleatoria y movimiento Browniano.

3.2 Diseño de Herramienta para la Caracterización de Trayectorias

Para realizar una caracterización de los diferentes comportamientos que están presentes en la dinámica subyacente de un proceso o un sistema dinámico se recurren a tanto a los métodos lineales y no lineales, que proporcionan información necesaria que puede ser comparada con el resto de los análisis y así tener información más confiable y precisa sobre el comportamiento de algún sistema dinámico de interés en este trabajo.

3.3 Métodos Lineales

Los métodos lineales interpretan las estructuras regulares en un conjunto de datos, tales como la frecuencia dominante, a través de correlaciones lineales. Esto significa que la dinámica intrínseca del sistema es gobernada por medio de un paradigma lineal que determina que las pequeñas causas conducen a pequeños efectos y que pueden ser predecidos de una manera más sencilla que aquellos no lineales.

Ahora bien, algo que se conoce de las ecuaciones lineales es que sólo presentan decaimientos exponenciales (o incrementos) ó soluciones oscilatorias periódicas, lo que permite asumir que las irregularidades se atribuyen a alguna entrada externa aleatoria del sistema. Sin embargo, se ha visto que cierto tipo de comportamientos como el de los sistemas caóticos, muestran respuestas irregulares en su salida, las cuales no se atribuyen a las entradas aleatorias externas, debido a que su respuesta es generada por ecuaciones completamente deterministas.

Por este motivo, se introducen los métodos lineales y no lineales para la caracterización de una serie temporal. Para empezar, se describe teóricamente la sección de la herramienta de caracterización de series temporales que puede identificar el rasgo más fácil de identificar, los comportamientos lineales.

En la mayoría de los análisis de series temporales una de las propiedades débiles más evidentes es la estacionariedad, la cuál es una condición que nos garantiza que las propiedades estadísticas permanecen fijas y constantes, lo que nos permite obtener información más confiable de un fenómeno o proceso. Dado que la dinámica de las series temporales que se tratan en este trabajo conocemos que son gobernadas por reglas deterministas constantes, podemos garantizar que los resultados que obtendremos son fácilmente reproducibles bajo las mismas condiciones y por lo tanto, confiables.

3.3.1 Función de Autocorrelación

La función de autocorrelación de una señal nos puede dar información sobre la presencia de correlaciones en los diferentes intervalos de tiempo de la evolución de una serie temporal [34], lo que implica que no es aleatoria, así como también permite encontrar un modelo apropiado que describe su comportamiento, suponiendo que la serie temporal no es aleatoria. La autocorrelación es un coeficiente de correlación que se calcula a partir de las muestras de la serie temporal para diferentes intervalos de tiempo o *retardos* τ y se calcula como,

$$c_\tau = \frac{1}{\sigma^2} \langle (s_n - \langle s \rangle) (s_{n-\tau} - \langle s \rangle) \rangle = \frac{\langle s_n s_{n-\tau} - \langle s \rangle^2 \rangle}{\sigma^2}. \quad (3.3.1)$$

La estimación de la autocorrelación de una serie de tiempo es sencilla, siempre y cuando el retardo τ sea pequeño comparado con el total de muestras de la serie temporal. Por lo tanto, la estimación de \hat{c}_τ sólo es razonable para $\tau \ll N$.

Si se grafican los valores de s_n contra los correspondientes valores de un retardo τ fijo anterior, $s_{n-\tau}$, la autocorrelación c_τ cuantifica como están distribuidos esos puntos. Si están igualmente esparcidos en todo el plano, entonces $c_\tau = 0$, y si estos están cercanos a la línea $s_n = -s_{n-\tau}$ se tendrá que $c_\tau < 0$. Los últimos dos casos reflejan una tendencia de s_n y $s_{n-\tau}$ proporcional a cada una, lo que lo hace plausible que la función de autocorrelación refleje solo correlaciones lineales.

Si la señal es observada en tiempo continuo, se puede introducir la función de autocorrelación $c(\tau)$, y las correlaciones de (3.3.1) son estimadas de $c(\tau = \tau \Delta t)$. Obviamente, $c_\tau = c_{-\tau}$ y $c_0 = 1$.

Por lo tanto, si una señal es periódica en el tiempo, la función de autocorrelación también es periódica en el retardo τ .

Las autocorrelaciones en las señales caóticas deterministas y de movimiento Browniano determinista típicamente también decaen exponencialmente en cada incremento de los retardos τ . Aunque las autocorrelaciones no son suficientes para distinguir entre este tipo de señales, además de entre la aleatoriedad.

3.3.2 Análisis de Fourier

En lugar de describir las propiedades estadísticas de una señal en su dominio temporal, resulta interesante conocer sus propiedades en su *espacio de Fourier* (dominio de la frecuencia). La *transformada de Fourier* ayuda a identificar fácilmente periodicidad o la existencia de una frecuencia fundamental [24]. Al igual que también permite establecer una relación recíproca entre las propiedades de la señal en el dominio temporal y las propiedades de la señal resultantes en el dominio frecuencial (propiedades de su espectro). La transformada de Fourier de una función $s(t)$ es

$$\tilde{s}(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp^{2\pi i f t} dt \quad (3.3.2)$$

y para una serie de tiempo finita discreta es

$$\tilde{s}_k := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N s_n \exp^{2\pi i k n / N} dt. \quad (3.3.3)$$

Aquí, las frecuencias son $f_k = k/N\Delta t$, donde $k = -N/2, \dots, N/2$ y Δt es el intervalo de muestreo. La normalización de ambas transformaciones es tal que la transformación inversa sólo equivale a un cambio de signo en la exponencial y un intercambio de f (ó k , respectivamente) y t (n , respectivamente). Entonces, ambas operaciones son invertibles y son transformaciones lineales.

3.3.3 Espectro de Potencia

El espectro de potencia de una señal nos permite obtener una gráfica en la que se puede observar como esta distribuida la potencia de las diferentes componentes de frecuencias que contiene [34]. Se calcula mediante el cuadrado de la *transformada de Fourier continua*, $S(f) = |\tilde{s}(f)|^2$.

Para aplicar este análisis a una serie de tiempo discreta y finita, es necesario obtener inicialmente el espectro por medio de la *transformada de Fourier discreta* y posteriormente calcular su magnitud para obtener la representación gráfica de la distribución de energía del espectro que se conoce como *periodograma*, $S_k = |s_k|^2$.

Cabe destacar que existen algunas desventajas en esta estimación entre las cuales estan las siguientes:

- la resolución frecuencial finita de una serie de la *transformada discreta de Fourier* lleva a fugas en contenido de frecuencias adyacentes.
- las fluctuaciones estadísticas son del mismo orden que $S(f)$ misma.

La solución para estos problemas es promediar los contenidos frecuenciales adyacentes , o de modo más eficiente, calcular el promedio de más ventanas que se van corriendo sobre el dominio del tiempo, sin embargo, dado que se analizan series temporales finitas, es decir, durante una misma ventana de tiempo, no son significativa la pérdida de información.

Otro aspecto interesante del espectro de potencia es una relación bien conocida y muy importante entre el espectro de potencia y la función de autocorrelación conocida como el *teorema de Wiener-Khinchin*. En terminos sencillos, establece que la *transformada de Fourier* de la *función de autocorrelación* de una señal es equivalente a su *espectro de potencia*.

La espectro de potencia es particularmente útil para estudiar las oscilaciones de un sistema, ya que es posible identificar por medio de picos agudos o más amplios las frecuencias dominantes,

o los armónicos de la señal.

A partir del espectro de potencial podremos identificar principalmente lo siguiente:

- En señales puramente periódicas o cuasi-periódicas habrá líneas espectrales agudas.
- Las mediciones de ruido agregan frecuencias continuas más pequeñas al espectro.
- Las señales caóticas pueden mostrar líneas espectrales agudas aunque en la ausencia de ruido habrá una parte continua del espectro. Esto es una consecuencia del decaimiento exponencial de las correlaciones.
- A partir de la literatura, en los experimentos realizados en partículas coloidales que presentan *movimiento Browniano*, se sabe que existe un relación lineal bien definida en forma de ley de potencia en su potencia espectral dada como S_k^ω donde $\omega = -2$.

De lo anterior se deduce que en el espectro de potencia, la señal y el ruido pueden distinguirse fácilmente, y que en algunos de los casos, el espectro de potencia de una señal, sin tener ninguna información adicional, es imposible inferir del espectro si la parte continua esta relacionada con el ruido de una señal (cuasi-) periódica o es debido al caos.

3.4 Métodos No Lineales

3.4.1 Rango Reescalado de Hurst

Esta técnica de análisis fue propuesta por Harold Edwin Hurst a principios del siglo XX. La relevancia de su análisis recae principalmente en que su método estadístico permitió descubrir información subyacente de un proceso, que relaciona la dependencia a largo plazo, aunque particularmente lo aplicó para su caso de estudio que trataba sobre el análisis de un fenómenos geofísico.

Este análisis también está estrechamente relacionado a la geometría fractal. La geometría fractal es un paradigma que ofrece una alternativa al problema de no poder representar elementos de algunas superficies de forma más precisa, lo cual normalmente implica hacer uso de geometrías regulares y bien definidas como las que conocemos, además, brinda una forma de evaluar características de gran relevancia en el estudio de la geometría fractal, como son el *exponente de Hurst* y la *dimensión fractal*.

El exponente de Hurst [29] es una medida de independencia de las series de tiempo que permite distinguir series fractales, i.e., tiene un comportamiento que puede ser caracterizado por un proceso aleatorio sesgado, en el cual existe “memoria de largo plazo” entre las observaciones, es decir, que los eventos de un periodo influyen en todos los siguientes.

Benoît B. Mandelbrot retomó los resultados obtenidos por Hurst y desarrolló un nuevo método estadístico, análisis de rangoreescalado de Hurst, el cuál resulta ser una generalización del trabajo de Hurst. Este es un método que permite encontrar el exponente de Hurst [29], el cual es un valor numérico que hace posible determinar las correlaciones de largo plazo en una serie de datos. Dicho método es ampliamente utilizado para evaluar la ocurrencia de eventos poco comunes, es decir, la existencia de procesos que persisten en una serie temporal, por lo tanto, es una herramienta idónea para analizar procesos físicos y financieros, donde es muy importante encontrar este tipo de fenómenos persistentes, sin embargo, no se limita solamente a este tipo de eventos, por lo que puede ser usado en cualquier serie de tiempo [24]. La metodología para el desarrollo del análisis del rango reescalado de Hurst [15] es la siguiente:

1. Se toma una serie de tiempo de longitud M , pero como sólo se analizarán los rendimientos logarítmicos, la serie original se reduce a una nueva serie de tiempo de longitud $N = M$ donde cada rendimiento está definido por:

$$N_i = \log \left(\frac{M_{i+1}}{M_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4.1)$$

2. Posteriormente, el período de tiempo N debe subdividirse una vez más en A -subperíodos contiguos que tendrán una longitud n , de tal modo que $A \cdot n = N$. Posteriormente se definen cada uno de los subperíodos como I_a para $a = 1, 2, \dots, A$. Cada elemento del subconjunto I_a está dado como $N_{k,a}$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Para cada subperíodo I_a de longitud n , el valor promedio está definido por la siguiente ecuación:

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{k,a} \quad (3.4.2)$$

3. Las desviación de cada elemento $N_{k,a}$ respecto a la media e_a para cada subperíodo I_a se van sumando para obtener la serie de tiempo acumulada $(X_{k,a})$, esta dado como:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.4.3)$$

4. El rango RI_a se define como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de $X_{k,a}$ para cada subperíodo I_a :

$$RI_a = \max(X_{k,a}) - \min(X_{k,a}), \quad \text{donde } 1 \leq k \leq n \quad (3.4.4)$$

5. Se calcula la desviación estándar muestral SI_a de la forma tradicional para cada periodo I_a :

$$SI_a = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^n (N_{i,a} - e_a)^2} \quad (3.4.5)$$

6. Para cada periodo I_a , su rango RI_a se normaliza dividiendo por su desviación estándar muestral SI_a correspondiente. Por lo tanto el rango reescalado para cada subperíodo I_a

es igual a RI_a/SI_a . Como tenemos periodos continuos de longitud , entonces tomamos el valor promedio R/S para periodos de longitud n y que está definido como:

$$(RS)_n = \left(\frac{1}{A} \sum_{a=1}^A (RI_a/SI_a) \right) \quad (3.4.6)$$

7. Finalmente, la longitud n o el tamaño del subperíodo se incrementa al siguiente valor posible de tal forma que $M - 1/n$ sea un valor entero. Iniciamos con el valor más pequeño de acuerdo a la condición anterior y se repiten los pasos del 1 al 6 hasta $n = (M1)/2$ utilizando siempre la serie completa (ver Figura). Posteriormente aplicamos una regresión de mínimos cuadrados de $\log(R/S)_n$ contra $\log(RS)_n$. La ordenada al origen es el $\log(c)$ y la pendiente de la ecuación es la estimación del *exponente de Hurst* H .

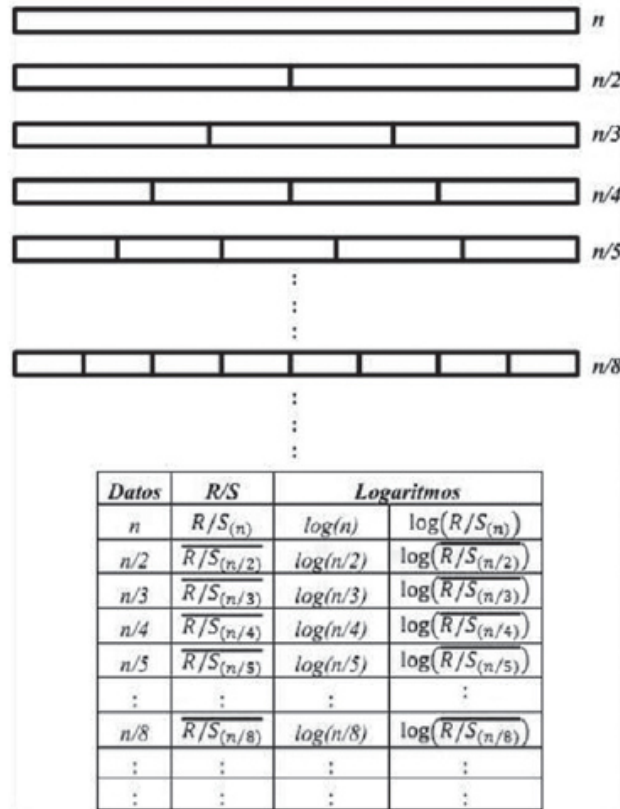


Figura 1. Construcción de grupos en la metodología del (R/S).

Figura 3.1: Construcción de los grupos considerados para el análisis de Rango Reescalado de Hurst. Imagen extraída de [15].

En la Figura 3.1 se ilustra gráficamente como se construyen los nuevos rangos para el análisis de rango reescalado de Hurst.

El valor del coeficiente de Hurst puede tomar los siguientes valores:

- Si $H = 0.5$ (*ruido blanco*) implica un *proceso completamente aleatorio* e independiente, con ausencia de correlación entre los incrementos de la señal. Correlación = 0.
- Si $0.5 < H \leq 1$ implica series de tiempo que muestran *procesos persistentes* o correlacionados (un período de crecimiento es seguido de otro análogo) y presentan un aspecto suave.
- Si $0 \leq H < 0.5$ corresponde a un comportamiento de *anti-persistencia* o *anti-correlacional* en la serie de tiempo (un período de crecimiento es seguido de otro de decrecimiento) que se caracteriza por un mayor contenido de alta frecuencia.

En la Figura 3.2 se ilustra como un exponente de Hurst elevado implica un tipo de *complejidad baja-correlación positiva*, i.e., un período de crecimiento es seguido por otro análogo (*procesos persistentes*) y un exponente de Hurst bajo indica una *complejidad alta-correlación negativa*, i.e., un período de crecimiento es seguido por uno decreciente (*procesos anti-persistentes*).

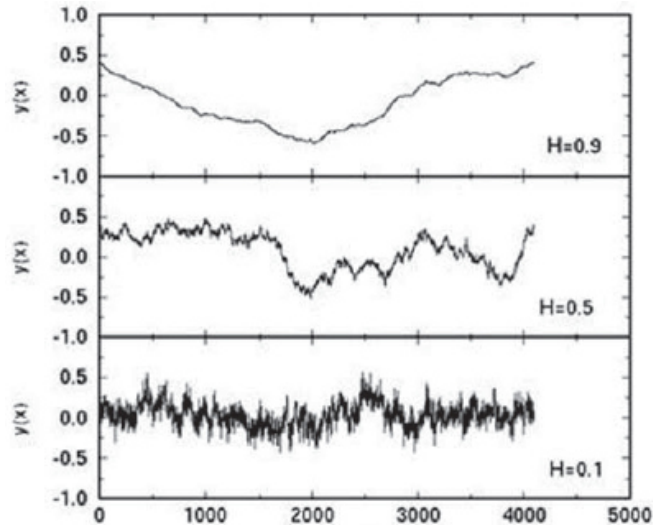


Figura 3.2: Exponente de Hurst como cuantificador de complejidad. Imagen extraída de [15].

El análisis desarrollado por Mandelbrot obtiene el valor del exponente de Hurst (H), que se encuentra acotado entre 0 y 1, y menciona que este fenómeno ocurría debido a un efecto relacionado a la invariancia al cambio de escala, lo cual es una característica intrínseca de las series de tiempo fractales [46].

3.4.2 Análisis de Fluctuación Sin Tendencia (DFA)

C. K. Peng y otros investigadores desarrollaron este análisis en 1994 [55] y ha sido aplicado en diversos campos de estudio como en el estudio de la dinámica del corazón, el análisis de señales cerebrales, la caminata humana, registros metereológicos, datos financieros, etc. El análisis de fluctuación sin tendencia (DFA, por sus siglas en inglés) es un método estadístico similar al rango reescalado de Hurst. Son métodos basados en la teoría de la caminata aleatoria, ya que los elementos de la serie temporal son considerados como sumandos para estos análisis, lo que ayuda a reducir notablemente el nivel de ruido que pueda estar presente en la serie temporal. Cabe destacar que el método del DFA puede analizar series de tiempo que no sean estacionarias, sin ver afectados sus resultados, lo que no sucede con el rango reescalado de Hurst.

Este análisis permite encontrar tendencias a partir de las fluctuaciones intrínsecas de la serie temporal, lo cual requiere detectar confiablemente las correlaciones. Las tendencias pueden ser causadas por factores externos, por ejemplo, el efecto invernadero y los registros de variaciones estacionales de la temperatura, esta usualmente suponen tener un comportamiento suave y monótono o un comportamiento lentamente oscilatorio. Sin embargo, aunque haya tendencias fuertes en los datos, asociada con la falsa detección de correlaciones de largo alcance, este análisis elimina sistemáticamente las tendencias de distintos ordenes. La metodología para realizar el análisis DFA [33] es la siguiente:

Considérese un registro x_i de $i = 1, 2, \dots, N$ mediciones equiespaciadas. En la mayoría de las aplicaciones, el índice i corresponde al tiempo de las mediciones. Solo estamos interesados

en las correlaciones de los valores x_i y x_{i+s} para diferentes retardos, esto es, las correlaciones a diferentes escalas de tiempo determinadas por s . Con el fin de deshacerse de un desplazamiento constante en los datos, se promedian los datos de la colección de observaciones

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (3.4.7)$$

la cuál es usualmente restada, $\bar{x}_i = x_i - \langle x \rangle$. Cuantitativamente, las correlaciones entre los valores de la colección de observaciones $\{x\}_{i=1}^N$ separadas por s pasos son definidas por la función de (auto-)correlación:

$$C(s) = \langle \bar{x}_i - \bar{x}_{i+s} \rangle = \frac{1}{N-s} \sum_{i=1}^{N-s} \bar{x}_i \bar{x}_{i+s}. \quad (3.4.8)$$

Si x_i está incorrelacionada, $C(s) = 0$ para $s > 0$. Las correlaciones de corto alcance ente los valores x_i son resultado de decaimiento exponencial de $C(s)$, $C(t) \approx e^{-s/s_x}$ con un tiempo de decaimiento s_x . Para las llamadas correlaciones de largo alcance $C(s)$ decae como una ley de potencia

$$C(s) \propto s^{-\gamma}, \quad (3.4.9)$$

con un exponente $0 < \gamma < 1$. El cálculo directo de $C(s)$ no es apropiado debido al ruido superpuesto de los datos recogidos x_i y debido a las tendencias subyacentes de origen desconocido. Por ejemplo, el promedio $\langle x \rangle$ puede ser diferente para la primera y la segunda mitad del registro, si los datos tienen fuertes correlaciones de largo alcance. Por lo que es deseable estimar el exponente de correlación de un modo diferente.

Usualmente los datos son afectados por las no estacionariedades. Tales tendencias tienen que ser bien discernidas de las fluctuaciones intrínsecas del sistema para poder encontrar el correcto comportamiento de escala de las fluctuaciones. Esto no es algo sencillo, debido a que restando algún tipo de media móvil con un cierto ancho de contenido α introduciría artificialmente la escala de tiempo α en los datos, destruyendo una escala posible de un amplio rango de escalas de tiempo. El análisis de rango reescalado de Hurst [15] y otros métodos que no eliminan tendencia funcionan bien si los registros son largos y no involucran tendencias. Pero si hay tendencias en los datos, estos podrían dar resultados equivocados. El DFA es un método bien definido para determinar el comportamiento de escala de los datos ruidosos en presencia de tendencias, aún sin conocer su origen y forma. El procedimiento del DFA consiste en cuatro pasos:

Determinar el perfil

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i x_k - \langle x \rangle, \quad (3.4.10)$$

del registro de los datos x_i de longitud N . La resta del promedio no es obligatoria, dado que podría ser eliminada después al eliminar la tendencia en el tercer paso.

En el segundo paso se divide el perfil $Y(i)$ en $N_s \equiv N/s$ segmentos no solapados de longitud igual a s . Puesto que la longitud de registro N no necesita ser un múltiplo de la escala de tiempo considerada s , una corta parte al final del perfil se quedará en la mayoría de los casos. Con el fin de no ignorar esta parte del registro de datos, se repite el mismo procedimiento a partir del otro extremo del registro. Por lo tanto, se obtienen en conjunto $2N_s$ segmentos. En el tercer paso calculamos la tendencia local para cada segmento ν por medio de un ajuste de mínimos cuadrados de los datos. Entonces, definimos la serie temporal sin tendencia con duración de s -segmento, denotada por $Y_i(s)$, como la diferencia entre la serie temporal original y los ajustes

$$Y_i(s) = Y(i) - p_\nu(i), \quad (3.4.11)$$

donde $p_\nu(i)$ son los polinomios de ajuste en el ν -ésimo segmento. Pueden usarse polinomios lineales, cúbicos o de orden superior en el procedimiento de ajuste. Dado que la eliminación de la tendencia de la serie temporal es realizada mediante la resta de los ajustes del perfil, estos métodos difieren en su capacidad de eliminar las tendencias en los datos. En el DFA de orden n , se eliminan las tendencias de orden n en el perfil y de orden $n - 1$ en el registro original.

En el cuarto paso se calcula la varianza para cada uno de los $2N_s$ segmentos

$$F_s^2(\nu) = \langle Y_s^2(i) \rangle = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s Y_s^2[(\nu - 1)s + i], \quad (3.4.12)$$

de la serie temporal sin tendencia $Y_s(i)$ promediando todos los i datos en el ν -ésimo segmento. Por último, se promedian todos los segmentos y se toma la raíz cuadrada para obtener la función de fluctuación del DFA

$$F(s) = \left[\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} F_s^2(\nu) \right]^{1/2}. \quad (3.4.13)$$

Para diferentes eliminaciones de tendencia de orden n se obtienen diferentes funciones de fluctuación $F(s)$, las cuáles están denotadas por $F^{(n)}(s)$. Por construcción, $F^{(n)}(s)$ está solo definida por $s \geq n + 2$. Estamos interesados en la s -dependencia de $F^{(n)}(s)$. Es obvio, que la varianza incrementará con el crecimiento de duración s de los segmentos. Si el registro de datos x_i están correlacionados con una ley de potencia de largo alcance, como se nota en la ecuación (3.4.9), las funciones de fluctuación $F^{(n)}(s)$ incrementan por una ley de potencia

$$F^{(n)}(s) \propto s^\alpha, \quad (3.4.14)$$

para valores grandes de s , donde el exponente de fluctuación está relacionado al exponente de correlación γ . Una derivación directa de la ecuación utiliza (3.4.14) para valores grandes de s . Para datos sin tendencia y desplazamiento nulo, $\bar{x}_i = x_i$ y $Y_s(i) = Y(i)$ para $i \leq s$. Entonces, el desplazamiento cuadrático medio en cada segmento n puede ser calculado, usando las ecuaciones (3.4.8) y (3.4.10),

$$\langle Y^2(i) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^i x_k^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{\substack{j,k < i \\ k \neq j}} x_j x_k \right\rangle = i \langle x^2 \rangle + \sum_{\substack{j,k < i \\ k \neq j}} C(|k-j|) = i \langle x^2 \rangle + 2 \sum_{k=1}^{i-1} (i-k) C(k). \quad (3.4.15)$$

Para un valores grandes de i , el segundo término puede ser aproximado, usando la ecuación (3.4.9) y resulta,

$$\sum_{k=1}^{i-1} C(k) \approx \sum_{k=1}^i k^{-\gamma} \approx \int_1^i k^{-\gamma} dk \approx i^{1-\gamma} \text{ y } \sum_{k=1}^{i-1} k C(k) \approx i^{2-\gamma}. \quad (3.4.16)$$

Si los datos están correlacionados con una ley de potencia de largo alcance con $0 < \gamma < 1$, este término dominará para toda i grande, dando

$$\langle Y^2(i) \rangle = i^{2-\gamma}. \quad (3.4.17)$$

Entonces, el desplazamiento cuadrático medio $\langle Y^2(i) \rangle$ del perfil aumenta más rápido que linealmente en i , lo cuál corresponde a un superdifusión. Una aproximación similar para $F^{(n)}(s)$, usando la ecuación (3.4.17) nos lleva a:

$$F^{(n)}(s) \approx s^{1-\gamma/2}, \quad (3.4.18)$$

para grandes escalas de tiempo s . Comparando las ecuaciones (3.4.14) y (3.4.18) se encuentra

$$\alpha = 1 - \frac{\gamma}{2} \quad \text{para} \quad 0 < \gamma < 1, \quad (3.4.19)$$

Si los datos están incorrelacionados o tienen correlaciones de corto alcance [$C(s)$ decae exponencialmente or $\gamma > 1$ en la ecuación (3.4.9)], el primer término en la ecuación (3.4.15) dominará para valores grandes de i , y encontraremos que $Y^2(i) \approx i$ (corresponde a una *difusión regular*) y por lo tanto $F^{(n)}(s) \approx s^{1/2}$. Por lo tanto, el coeficiente de fluctuación $\alpha = 1/2$ indica la ausencia de correlaciones de largo alcance.

Al graficar $F^{(n)}(s)$ como una función de s en dobles escalas logarítmicas para obtener α por medio de una regresión lineal (ajuste lineal). En resumen, los resultados importante que son obtenidos en este análisis son los siguientes:

- $\alpha = 0.5$ corresponde a datos incorrelaciones, o a una *caminata aleatoria*. Si existen correlaciones de corto alcance en los datos, el ajuste lineal puede dar un resultado diferente de 0.5, sin embargo, para grandes ventanas de tiempo α se aproximará a 0.5.
- $0.5 < \alpha < 1$ indica que existen correlaciones persistentes de largo alcance que obedecen a una ley de potencia, tal que para grandes intervalos de crecimiento es más probable que sean seguidos por otros grandes intervalos de crecimiento y viceversa.
- $0 < \alpha < 0.5$ indica un diferente tipo correlaciones de ley de potencia tal que para grandes y pequeños valores de la serie de tiempo será más probable su alternancia.
- Un caso especial de $\alpha = 1$ corresponde al *ruido* $1/f$.
- $\alpha \geq 1$ indica que existen correlaciones, pero ya no tienen una forma de ley de potencia.
- $\alpha = 1.5$ es otro caso especial, indica que se tiene *movimiento Browniano*, la integración del ruido blanco.

El exponente α puede ser visto como un indicador que describe la “*rugosidad*” de las series temporales: el valor más grande de α , indica “*suavidad*” en la serie temporal, este hecho está estrechamente relacionado con la geomtría fractal.

Para comprender como funciona el análisis del DFA, en el trabajo [55] se aplico este análisis a secuencias de DNA que se conoce por medio de la literatura que presentan ciertas correlaciones de largo alcance en forma de ley de potencia.



Figura 3.3: Caminatas de DNA con distintas secuencias de control. Imagen extraída de [55].

Para ilustrar los resultados obtenidos a través de este análisis, se hace énfasis en la Figura 3.3(a) donde se muestra una caminata de DNA representativa para un clase de secuencias de control artificiales generadas por subsecuencias unificadas que corresponden a caminatas aleatorias con diferente composición de nucleótidos. En la Figura 3.3(b) se ilustra una caminata de DNA representativa para una clase diferente de secuencias generadas por un modelo con correlación de ley de potencia de largo alcance bien definida.

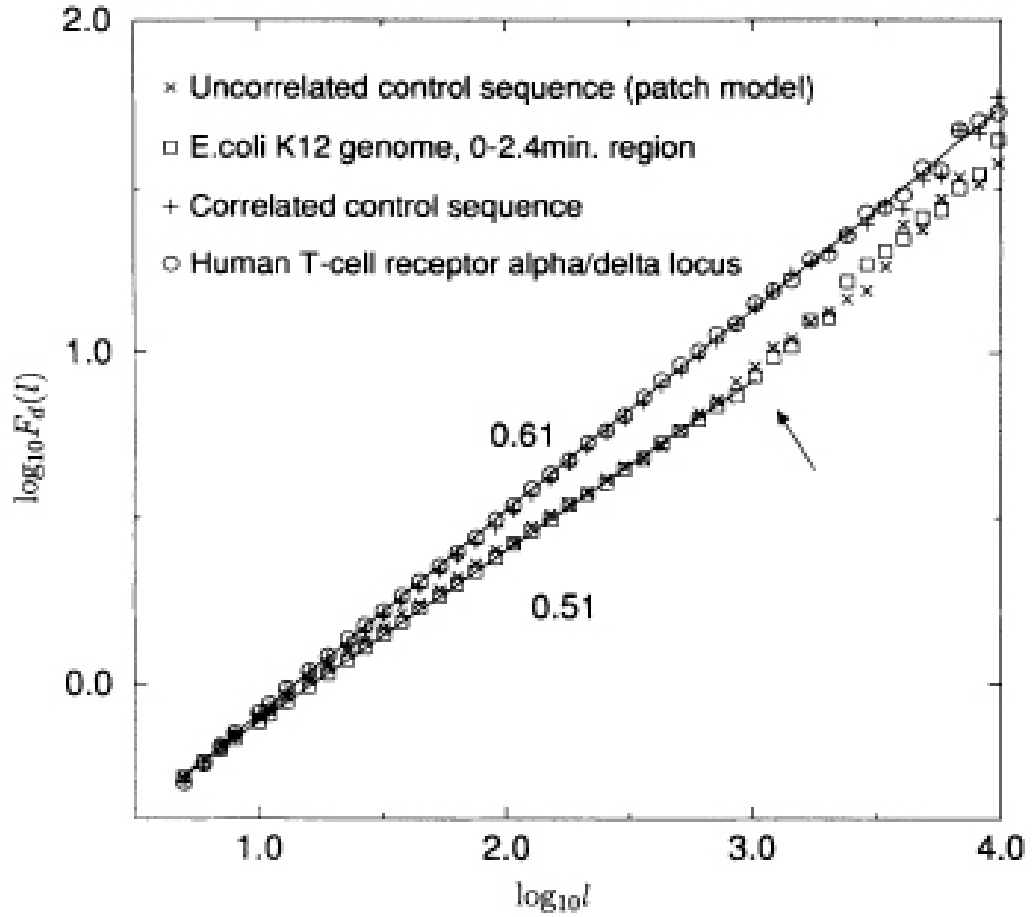


Figura 3.4: Resultados de la aplicación del DFA a las caminatas de DNA mostradas en la Figura 3.3. Imagen extraída de [55].

En la Figura (3.4) se muestran los resultados de aplicar el DFA a caminatas de DNA con diferentes secuencias de control. Para la secuencia de control que no posee correlaciones de la Figura 3.3(a), resultó tener un exponente de escalamiento $\alpha = 0.51$, en cambio, para la secuencia de DNA con un modelo de correlaciones bien definida de la Figura 3.3(b) resultó tener un exponente de escalamiento $\alpha = 0.61$. Los resultados entre estas caminatas de DNA es evidente, el mayor exponente de escalamiento posee correlaciones de largo alcance bien definidas, mientras que la caminata de DNA que tiene un exponente de escalamiento cercano 0.5, implica que no posee correlaciones de largo alcance, característico de las caminatas aleatorias.

3.4.3 Reconstrucción del Atractor

Como se menciona anteriormente, los sistemas caóticos se caracterizan por tener atractores “extraños”, los cuales son complicados objetos geométricos que usualmente exhiben una estructura *fractal*, es decir, presentan invarianza en su escala. Un sistema dinámico determinista puede ser usualmente descrito como un objeto en el espacio de fase, dado que esta es la manera óptima de estudiar sus propiedades dinámicas y geométricas. Es muy importante tener al alcance el espacio de fase de los sistemas dinámicos con propiedades deterministas, aunque en algunos de los casos solo se tiene una serie temporal, no un objeto en el espacio de fase. Lo cual no significa un problema para nuestro caso pero dado que se desean estudiar las propiedades dinámicas de una serie temporal, se considera necesario convertir las observaciones de la serie temporal en cuestión, en sus vectores de estado. Aquí radica la importancia de la *reconstrucción del espacio de fase*, una técnica que permite formar estos vectores de estado a través del método de retardos (o construcciones relacionadas) [64].

Las series de tiempo son esencialmente una secuencia de mediciones escalares de algún fenómeno o proceso, que dependen del estado actual del sistema. Entonces, tomando múltiplos de un tiempo de muestreo fijo:

$$s_n = s(x(n\Delta t)) + \eta_n, \quad (3.4.20)$$

esto es, se busca en el sistema a través de una función de medición s , observaciones por encima de las fluctuaciones aleatorias η_n , que es el *ruido de medición*. Dado que en este trabajo se tratan series temporales provenientes de un sistema dinámico determinista y conocemos el modelo que lo describe, el efecto del ruido no es relevante. Una reconstrucción retardada en m dimensiones está formada entonces por los vectores \mathbf{s}_n como,

$$\mathbf{s}_n = (s_{n-(m-1)\tau}, s_{n-(m-2)\tau}, \dots, s_{n-\tau}, s_n). \quad (3.4.21)$$

La diferencia de tiempo en el número de muestras τ (o en unidades de tiempo, $\tau\Delta t$) entre componentes adyacentes de los vectores retardados se conoce como *tiempo de retardo*. Cuando $\tau = 1$, solo la ventana de tiempo cubierta por cada uno de los vectores aumenta, mientras que el número de vectores construídos de la serie temporal escalar permanece practicamente igual. Esto es debido a que se crea un vector para cada observación escalar, s_n , con $n > (m-1)\tau$. Hay teoremas de inmersión que tratan sobre la cuestión de bajo que circunstancias y en qué medida el objeto geométrico formado por los vectores de reconstrucción s_n es equivalente a la trayectoria arrojada por el sistema dinámico original x_n . De hecho, bajo circunstancias muy generales el atractor fomrado por s_n es equivalente al atractor en el espacio de fase desconocido, en en el cuál vive el sistema original. Por lo tanto, es posible reconstruir el movimiento de los atractores.

3.4.4 Método de los Falsos Vecinos Cercanos

Al analizar una serie temporal escalar, no se conoce la dimensión de inmersión, ni del valor de retardo τ . Los teoremas de inmersión garantizan que para los datos libres de ruido, existe una dimensión tal que los vectores s_n son equivalentes a los vectores del espacio de fase. Por lo cuál se usa el método de los *falsos vecinos cercanos* (FNN, por sus siglas en inglés) para encontrar la dimensión de inmersión m ideal del atractor.

Si se supone que la dinámica en el espacio de fase es representada por un vector de campo suave, entonces los estados cercanos deberán estar sujetos a casi la misma evolución temporal. Por lo tanto, después de un corto período de tiempo, las trayectorias emergentes de éstos deberán seguir siendo vecinos cercanos, incluso si el caos introduce una divergencia exponencial.

El concepto de FNN fue introducido por Kennel, Brown y Arbanel en 1992 [36]. La idea

básica es la búsqueda de puntos en un conjunto de datos los cuáles son vecinos en un espacio de inmersión, pero que no deberán serlo conforme evolucionan temporalmente ya que en un futuro sus trayectorias son muy diferentes. Supongase que la dimensión de inmersión para un conjunto de datos es m_0 . Después, se estudian estos datos en una menor dimensión de inmersión $m < m_0$. La transición de m_0 a m es una proyección, es decir, se eliminan ciertos ejes del sistema coordenado. Por lo tanto, puntos de ese sistema coordenado los cuáles fueron eliminados por la proyección difieren fuertemente, y pueden convertirse en "falsos vecinos" en el espacio m dimensional. Las estadísticas ayuda a estudiar lo que ahora resulta obvio: para cada punto de la serie de tiempo, se toma su vecino más cercano en m dimensiones, se calcula el radio de distancias entre esos dos puntos en $(m + 1)$ dimensiones y en la dimension m . Si este radio es más grande que el umbral r , el vecino fue falso. Este umbral tiene que ser suficientemente grande para permitir una divergencia exponencial debida al caos y otras dinámicas irregulares complejas. Al denotar la desviación estándar de los datos por σ y usando la norma *máxima*, se calcula

$$X_{fnn}(r) = \frac{\sum_{n=1}^{N-m-1} \Theta\left(\frac{|s_n^{(m+1)} - s_{k(n)}^{(m+1)}|}{|s_n^{(m)} - s_{k(n)}^{(m)}|} - r\right) \Theta\left(\frac{\sigma}{r} - |s_n^{(m)} - s_{k(n)}^{(m)}|\right)}{\sum_{n=1}^{N-m-1} \Theta\left(\frac{\sigma}{r} - |s_n^{(m)} - s_{k(n)}^{(m)}|\right)} \quad (3.4.22)$$

donde $s_{k(n)}^{(m)}$ es el vecino más cercano a s_n en m dimensiones, esto es, $k(n)$ es el índice de los k elementos de la serie de tiempo diferentes de n para la cual $|s_n - s_k| = \min$. La primera función escalon en el numerador es la unidad, si el vecino más cercano es falso, esto es, si la distancia incrementa por un factor mayor que r cuando incrementa la dimensión de inmersión por la unidad, mientras que la segunda función escalon suprime todos esos pares, cuya distancia inicial fue más grande que σ/r . Pares cuya dinstancia inicial es más grande que σ/r por definición no pueden ser vecinos falsos, debido a que, en promedio, no hay suficiente espacio para salir más allá de σ . Por lo tanto, esos son candidatos inválidos el método y no deben ser contados, lo cual también es reflejado en la normalización. Pueden haber algunos vecinos falsos cercanos incluso

cuando se está utilizando la dimensión de inmersión correcta.

3.4.5 Información Mutua Promediada

Una buena estimación del tiempo de retardo $\tau = \tau \Delta t$ es difícil de obtener. El retardo τ no está sujeto a los teoremas de inmersión, dado que estos consideran datos precisos.

Los métodos estadísticos son una buena herramienta, el método estadístico óptimo desde el punto de vista práctico es la función de autocorrelación, ya que en primer lugar se calcula para familiarizarse con los datos y da pistas sobre la estacionariedad y las típicas escalas de tiempo. Una muy razonable objeción de este método es que está basado en estadística lineal y no toma en cuenta las correlaciones dinámicas no lineales. Por lo tanto, se debe optar por utilizar el primer mínimo de la información mutua promediada retardada en el tiempo [20]. El uso de este método es el más comunmente usado durante los últimos años para elegir un valor de retardo adecuado. Tal procedimiento se encarga de calcular la información (bits) que se puede predecir de un dato tomando información de datos previos y este método está estrechamente relacionado con la *entropía de Shannon* [61].

En el intervalo explorado por los datos, se crea un histograma de resolución ϵ para la distribución de probabilidad de los datos. Denotando p_i como la probabilidad de que la señal tome un valor dentro de la i -ésima partición del histograma, y sea $p_{i,j}(\tau)$ la probabilidad de que $s(t)$ esté en la partición i y $s(t + \tau)$ en la partición j . Entonces la información mutua para el tiempo de retardo τ se lee como

$$I_\epsilon(\tau) = \sum_{i,j} p_{i,j}(\tau) \ln p_{i,j}(\tau) - 2 \sum_i p_i \ln p_i. \quad (3.4.23)$$

El primer mínimo de $I(\tau)$ marca el tiempo de retardo donde $s(t + \tau)$ agrega máxima información al conocimiento que tenemos de $s(t)$, en otras palabras, la redundancia es menor.

3.4.6 Exponentes de Lyapunov

Las trayectorias que divergen sobre el transcurso del tiempo podría no parecer algo muy indicativo, pero si sólo ocurre muy lentamente, ya que esto es predominantemente característico de los sistemas periódicos, aunque se conoce que en los sistemas caóticos esto sucede con una rapidez exponencial. Conocer el exponente propiamente promediado (*exponente de Lyapunov*) de este incremento característico de la información subyacente del sistema permite cuantificar la intensidad del caos. Se pueden definir tantos exponentes de Lyapunov para un sistema dinámico como tantas dimensiones se tenga en el espacio de fase. Sin embargo es posible restringir el calculo a sólo uno, que es el mas importante, el *máximo exponente de Lyapunov* λ .

Sea S_{n1} y s_{n2} dos puntos en el espacio de estados con una distancia $\|s_{n1} - s_{n2}\| = \delta_0 \ll 1$. Denotando $\delta_{\Delta n}$ como la distancia en un tiempo Δn posterior entre dos trayectorias emergiendo de esos puntos, $\delta_{\Delta n} = \|s_{n1+\Delta n} - s_{n2+\Delta n}\|$. Entonces λ es determinado por

$$\delta_{\Delta n} \simeq \delta_0 e^{\lambda \Delta n}, \quad \delta_{\Delta n} \ll 1, \quad \Delta n \gg 1. \quad (3.4.24)$$

Si λ es positivo, esto significa que hay una divergencia exponencial entre las trayectorias cercanas, esto es, caos. Naturalmente dos trayectorias no pueden separarse más allá del tamaño del atractor, tal que la ley de la ecuación (3.4.24) sea únicamente válida durante tiempos Δn para el cual $\delta_{\Delta n}$ permanece pequeña. De otro modo se observa una violación de la ley de la ecuación (3.4.24) en la forma de una saturación de la distancia. Debido a esto, matemáticamente una definición más rigurosa tendrá que involucrar un primer límite $\delta_0 \rightarrow 0$ tal que el segundo límite $\Delta n \rightarrow \infty$ pueda ser realizado sin involucrar efectos de saturación. Sólo en el segundo límite el exponente λ se convierte en una cantidad invariante bien definida.

En los sistemas disipativos se pueden encontrar máximos exponentes de Lyapunov negativos los cuáles reflejan la existencia de un punto fijo estable. Dos trayectorias que se aproximan

a un punto fijo también pueden aproximarse una con la otra exponencialmente rápido. Si el movimiento se ajusta a un ciclo límite, las dos trayectorias pueden sólo separarse o aproximarse la una con la otra más lento que exponencialmente. En este caso el máximo exponente de Lyapunov es cero y el movimiento es llamado marginalmente estable. Si un sistema predominantemente determinista es perturbado por ruido, en pequeñas escalas de tiempo puede ser caracterizado por un proceso de difusión, con $\delta_{\Delta n}$ creciendo como $\sqrt{\Delta n}$, entonces el máximo exponente de Lyapunov es infinito. Concordando con la definición matemática, esto es verdad sin importar que tan pequeña sea la componente de ruido. En la tabla 3.4.1 se resumen los resultados que pueden obtenerse del máximo exponente de Lyapunov. Se utilizó el algoritmo de Wolf [71] para realizar el cálculo de los exponentes de Lyapunov de las series temporales.

| Tipo de Movimiento | Máximo Exponente de Lyapunov |
|----------------------|------------------------------|
| Punto Fijo Estable | $\lambda < 0$ |
| Ciclo Límite Estable | $\lambda = 0$ |
| Caos | $0 < \lambda < \infty$ |
| Ruido | $\lambda = \infty$ |

Tabla 3.4.1: Posibles tipos de movimientos y sus correspondientes máximos exponentes de Lyapunov

3.4.7 Dimensión de Correlación

Existen varias formas de cuantificar la auto-similaridad de un objeto geométrico como un atractor por medio de su dimensión. Realizando una estimación de la integral de correlación se calcula la dimensión de correlación. Grassberger y Procaccia [23] desarrollaron un algoritmo que permite obtenerla a partir de las observaciones realizadas de una serie temporal. Este algoritmo en particular, es uno de varios otros existentes, sin embargo, es el que se usa más comunmente debido a su eficiencia con respecto a los otros.

Primero, se define la suma de correlación para una colección de puntos x_n de algún vector

del espacio que sea la fracción de todos los posibles pares de puntos los cuáles están cercanos a una distancia ϵ , para alguna norma. La fórmula básica (puede ser modificada por practicidad en alguna aplicación en particular) es

$$C(\epsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_N^{i=1} \sum_N^{j=i+1} \Theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|), \quad (3.4.25)$$

donde Θ es la función función escalón de Heaviside, $\Theta(x) = 0$ si $x \leq 0$ y $\Theta(x) = 1$ si $x > 0$. La suma sólo cuenta los pares (x_i, x_j) cuya distancia es más pequeña que ϵ . En el límite de una cantidad infinita de datos ($N \rightarrow \infty$) y para un ϵ más pequeño, se espera que C se comporte como una ley de potencia, $C(\epsilon) \propto \epsilon^D$, y se puede definir la dimensión de correlación D por

$$d(N, \epsilon) = \frac{\partial \ln C(\epsilon, N)}{\partial \ln \epsilon}, \quad (3.4.26)$$

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} d(N, \epsilon). \quad (3.4.27)$$

Algunos autores sugieren que de debe intentar usar diferentes valores de la dimensión de inmersión, por que que realizar el análisis usando una solo valor de dimensión no arrojará información concluyente, y al estar variando el valor de la dimensión se debe observar como la dimensión se correlación tiene a un valor finito, el cuál puede ser un número no entero. Por lo tanto, se concluye para el cálculo de la dimensión de correlación los siguientes aspectos de mayor relevancia:

- Para sistemas caóticos, mientras se vaya aumentando el valor de la dimensión de inmersión m , el exponente α alcanza un límite en un valor finito, es decir, se alcanza la saturación de la dimensión de inmersión.
- Para series temporales aleatorias, al aumentar el valor de la dimensión de inmersión m , se alcanza una dimensión alta (por lo general mayor a 5), o bien, nunca se estabiliza alrededor

de un valor, es decir, no ocurre la saturación de la dimensión de correlación, entonces el exponente α sigue aumentando y se considera que será infinito.

Esta dimensión representa una medida de la correlación espacial de los datos a partir del atractor generado por el sistema dinámico, lo que permite distinguir las series de tiempo que presentan auto-similaridad (*dimensión fractal*) y aquellas que son completamente aleatorias. La dimensión de correlación revela que la complejidad subyacente de una serie temporal, ya que permite establecer el número mínimo de dimensiones (*variables*) que caracterizan la dinámica real del sistema que genera tal serie temporal.

3.5 Resumen de las Metodologías para la Caracterización de las Series Temporales



Figura 3.5: Resumen de los métodos para la caracterización de series temporales.

3.5.1 Índices de los Análisis de las Series de Tiempo

| Análisis de Series de Tiempo | |
|---|--|
| Tipo de Análisis | Índices |
| Análisis de Fourier | Decaimiento Exponencial en frecuencia. |
| | Ley de Escalamiento de la Densidad Espectral: $\beta \approx -2$. Movimiento Browniano |
| Función de Autocorrelación | Hay correlaciones. |
| | No hay correlaciones. |
| Rango Reescalado de Hurst | $0.5 < H \leq 1$. Complejidad Baja-Correlación Positiva. |
| | $H = 0.5$. Serie Temporal Aleatoria. |
| | $0 \leq H < 0.5$. Complejidad Alta-Correlación Negativa. |
| Análisis de Fluctuación Sin Tendencia (DFA) | $0 < \alpha < 0.5$. Existen correlaciones de corto plazo. |
| | $\alpha = 0.5$. Serie Temporal Aleatoria. |
| | $0.5 < \alpha < 1$. Existen correlaciones de largo plazo. |
| | $\alpha = 1$. Ruido $1/f$. |
| | $\alpha = 1.5$. Movimiento Browniano. |

Tabla 3.5.2: Tabla con los índices resultantes de la herramienta para la caracterización de trayectorias.

| Análisis de Series de Tiempo | |
|---------------------------------------|---|
| Tipo de Análisis | Índices |
| Exponentes de Lyapunov | $\lambda = +$. Impredictibilidad. |
| | $\lambda = 0$. Ciclo límite. |
| | $\lambda = -$. Punto límite. |
| Dimensión de Correlación | Saturación de la dimensión. Serie de tiempo caótica |
| | No se satura la dimensión. Serie de tiempo aleatoria. |
| Reconstrucción del Atractor | La serie de tiempo puede tener un atractor definido o no (mostrar gráficamente). |
| Información Mutua Promediada | Cantidad de información (bits) que se puede predecir a un cierto retardo τ . Se elige el que arroja el primer mínimo encontrado. |
| Método de los Vecinos Cercanos Falsos | Dimensión de inmersión existente |
| | Dimensión de inmersión no existente |

Tabla 3.5.3: Tabla con los índices resultantes de la herramienta para la caracterización de trayectorias.

Se hizo mención de las diferentes metodologías necesarias para el análisis y caracterización de la dinámica subyacente de las series de tiempo que son obtenidas por los sistemas dinámicos y que serán usadas para analizar la dinámica que generan las trayectorias del robot móvil, de este modo se tiene una manera de caracterizar con un mayor rigo matemático un amplio tipo de comportamientos dinámicos. Los análisis considerados por la herramienta de caracterización de series de tiempo contemplan métodos lineales y no lineales. Estos análisis no solo se enfocan en la dinámica generada por las trayectorias de robots móviles, si no que pueden encontrar dinámicas presentes o escondidas en series de tiempo de algún otro proceso físico. Con estas herramientas se analizan características dinámicas como la geometría del atractor fractal, la impredictibilidad, rugosidad ó complejidad y la existencia de relaciones lineales que den indicios para realizar una correcta caracterización de las series temporales . Estos análisis también se aplicarán para comprobar el tipo de dinámica subyacente en cada una de las variables del modelo dinámico del robot móvil de configuración diferencial que se describe en el siguiente capítulo de este trabajo.

Capítulo 4

Modelado de Robot Móvil

4.1 Introducción

En este capítulo se explica el modelado del robot móvil de tipo unicycle con configuración diferencial que proporciona las herramientas para realizar la caracterización del sistema físico en ecuaciones dinámicas y poder lograr posteriormente el seguimiento de trayectorias mediante la teoría de control. Se desarrolla el modelo de un RMR de configuración diferencial.

4.2 Consideraciones para el Modelado de Robots Móviles

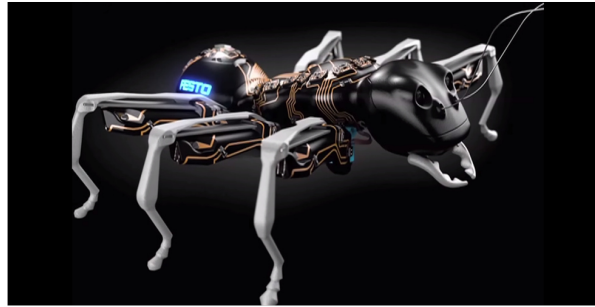
Como se ha mencionado previamente, los diferentes mecanismos de locomoción de los robots móviles pueden clasificarse en aquellos que poseen ruedas, patas u orugas, algunos ejemplos de robots con distintos tipos de mecanismos de locomoción se ilustran en la Figura 4.1. Este trabajo esta enfocado en los robots móviles con ruedas, los cuáles han sido ampliamente estudiados en la literatura, en [8] se describen varios modelos cinemáticos que poseen variantes estructurales comúnmente consideradas en el diseño de este tipo de robots móviles.



a) Tracción por medio de orugas



b) Tracción por medio de ruedas



c) Tracción por medio de patas

Figura 4.1: Mecanismos de locomoción en los robots móviles.

Los RMR son objeto de mayor esfuerzo de investigación debido su simplicidad y versatilidad para su uso en diversas aplicaciones, ya que estos vehículos tienen la capacidad de moverse libre y autónomamente sobre una superficie. En el modelado de estos sistemas, se considera que el contacto entre las ruedas y la superficie sólo se produce en un punto de la superficie.

Este tipo de sistemas robóticos poseen restricciones cinemáticas no holonómicas, lo que resulta en la inexistencia de una relación biyectiva entre las variables cartesianas y articulares. Es importantes conocer acerca de las restricciones debido a que determinan el movimiento del RMR sobre la superficie de su entorno de trabajo, por este motivo, las restricciones también se convierten en un objeto de estudio de la robótica móvil.

Algunas consideraciones que deben realizarse al abordar el diseño de este tipo de sistemas son los siguientes:

- El robot móvil se mueve sobre una superficie plana horizontal (plano), es decir, la energía potencial es constante.
- Los ejes de guiado son perpendiculares a la superficie de desplazamiento del RMR.
- No hay elementos flexibles en la estructura del robot, incluyendo su ruedas.
- El contacto entre las ruedas y la superficie es un solo punto de contacto.
- No existe deslizamiento.

Debe destacarse que el modelado convencional de un RMR considera que la superficie donde realiza su desplazamiento es plana, es decir, no se consideran irregularidades. De los diferentes tipos de ruedas existentes se considera que el RMR a modelar utiliza ruedas fijas, ya que no poseen una articulación de dirección y su posición con respecto a la estructura del RMR es fija.

4.2.1 Configuración Diferencial

Existen diversas configuraciones que caracterizan la locomoción de un RMR, entre los cuáles se encuentran la del triciclo, diferencial y la síncrona.

Particularmente nos enfocaremos en la configuración diferencial, ya que el robot que será usado para la implementación y al que se le aplicarán los análisis anteriores y posteriores pertenece a este tipo de configuración. Este direccionamiento resulta es de los más sencillos, sin embargo, le permite realizar movimiento en línea recta, girar sobre sí mismo y dar vuelta hacia el sentido que se desee, permite prácticamente cualquier movimiento. Cada una de las ruedas laterales cuenta con su propio actuador independiente que está fijo a la estructura y las ruedas están alineadas de acuerdo a un eje de direccionamiento que es perpendicular a la dirección del RMR, ya que cada rueda tiene su propio actuador, permite que tanto las ruedas derecha e izquierda puedan moverse a diferente velocidad (w_r y w_l , respectivamente) y por medio de esta

diferencia de velocidades poder realizar giros o bien, y cuando las velocidades sean iguales pueda moverse en línea recta.

El *direccionamiento diferencial* o *configuración diferencial*, tiene un punto llamado *centro instantáneo de rotación* (ICR por sus siglas en inglés) sobre el cuál el robot móvil pivotea, se encuentra localizado sobre la línea perpendicular que atraviesa el centro de las ruedas. El radio de la circunferencia alrededor de este pivote punto llega a ser mínimo este se encuentra en el punto medio entre las ruedas. Por lo tanto, el espacio mínimo para que el robot gire es determinado por la distancia máxima de ese punto a cualquier otro punto en el robot móvil, normalmente la esquina delantera. En la Figura 4.2 se ilustra la configuración diferencial para un robot móvil con ruedas fijas, que será analizado detalladamente en este capítulo.

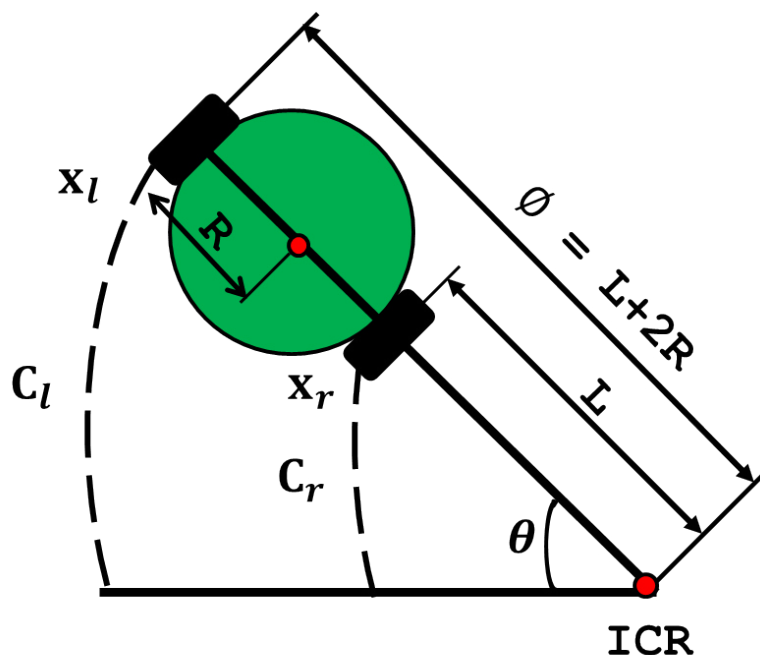


Figura 4.2: Configuración diferencial como sistema de dirección de un robot móvil con ruedas.

El equilibrio del robot se obtiene mediante una o dos ruedas adicionales de apoyo formando un diseño triangular o romboidal. El diseño triangular puede no ser suficiente dependiendo de la distribución del peso, y el romboidal puede provocar poca adaptación al terreno si éste es

irregular, lo que puede requerir algún tipo de suspensión.

4.3 Desarrollo del Modelado Cinemático del RMR de Configuración diferencial

En esta sección esta dedicada al desarrollo del modelo cinemático de un RMR de configuración diferencial.

Primero se hará el desarrollo de la cinemática del RMR. La deducción de la cinemática del RMR permite analizar como es que se genera el movimiento del RMR y cómo su movimiento se ve limitado en virtud a la configuración seleccionada, i.e., el direccionamiento diferencial determina el movimiento del RMR junto con las relaciones matemáticas de las restricciones no holonómicas que se deducirá a partir del siguiente análisis.

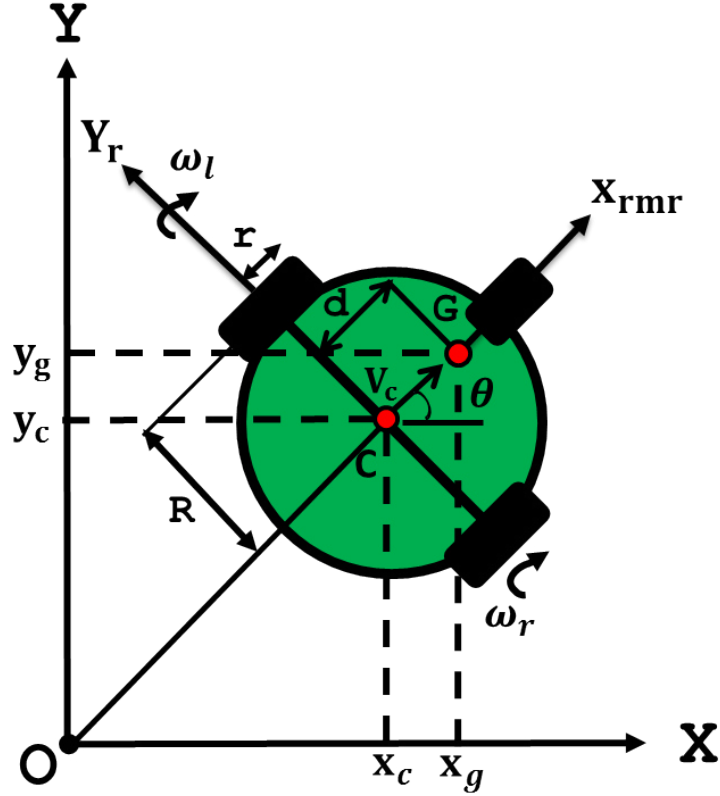


Figura 4.3: Ilustración de la configuración en el espacio del RMR.

A partir de la Figura 4.3, se tiene que la distancia recorrida x_{rmr} por la plataforma móvil a lo largo de una trayectoria se expresa por:

$$x_{rmr} = \frac{x_r + x_l}{2}, \quad (4.3.1)$$

donde x_r es el desplazamiento de la rueda derecha del robot móvil y x_l es el desplazamiento de la rueda izquierda del robot móvil. De la misma manera, se considera que la velocidad de la plataforma móvil v_{rmr} esta dada como:

$$v_{rmr} = \frac{v_r + v_l}{2}, \quad (4.3.2)$$

donde v_r es la velocidad de la rueda derecha del robot móvil y v_l es la velocidad de la rueda izquierda del robot móvil. Ya que la velocidad tangencial \bar{v}_{rmr} desarrollada por una rueda es,

$$\bar{v}_{rmr} = r\omega, \quad (4.3.3)$$

donde \bar{v}_{rmr} es la velocidad tangencial, r es el radio de giro y ω es la velocidad angular. Si se sustituye la expresión de la velocidad tangencial (4.3.3) se puede reexpresar la velocidad del desplazamiento (4.3.2) de las dos ruedas del robot móvil de la siguiente manera:

$$v_{rmr} = \frac{r\omega_r + r\omega_l}{2}. \quad (4.3.4)$$

El arco C_l representa una porción de la circunferencia de radio $L + 2R$ que se ilustra en la Figura 4.1. La expresión para C_l está dada por la ecuación de la longitud del arco de la circunferencia que se genera por la rotación del robot móvil a través de la rotación sobre el ICR que está representado por:

$$C_l = 2\pi(L + 2R), \quad (4.3.5)$$

donde C_l es la circunferencia del círculo trazado por la rueda izquierda del robot móvil, R es la distancia entre las ruedas y L es el radio de giro interno. A partir de la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{x_l}{C_l} &= \frac{\omega}{2\pi} \\ C_l &= \frac{2\pi x_l}{\omega} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

se toma la expresión (4.3.5) y se sustituye en la relación (4.3.6), entonces se despeja la velocidad angular (ω) obteniendo:

$$\omega = \frac{x_l}{2R+L} \quad (4.3.7)$$

Del mismo modo, el arco menor x_r representa una porción de la circunferencia de un círculo de radio L , cómo se describe en la ecuación:

$$C_r = 2\pi L, \quad (4.3.8)$$

donde C_r es el arco de la circunferencia trazado por la rueda derecha del robot móvil y L es el radio de giro interno. Considerando la relación:

$$\begin{aligned} \frac{x_r}{C_r} &= \frac{\omega}{2\pi} \\ C_r &= \frac{2\pi x_r}{\omega} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

se retoma la ecuación (4.3.8) y se sustituye en la relación (4.3.9), despues se despeja de la ecuación resultante el radio de giro interno obteniendo:

$$L = \frac{x_r}{\omega} \quad (4.3.10)$$

Al sustituir (4.3.10) en (4.3.7) se obtiene:

$$\omega = \frac{x_l}{2R + \frac{x_r}{\omega}}, \quad (4.3.11)$$

y despejando para la velocidad angular w :

$$\begin{aligned}\omega \left(2R + \frac{x_r}{\omega}\right) &= x_l \\ \left(2R + \frac{x_r}{\omega}\right) &= \frac{x_l}{\omega} \\ \omega &= \frac{x_r - x_l}{2R}.\end{aligned}\tag{4.3.12}$$

A partir de la ecuación (4.3.10) se puede decir que el cambio de la orientación (θ) es una función del desplazamiento de las ruedas izquierda y derecha, que es independiente de la trayectoria y se obtiene:

$$\omega = \frac{x_r - x_l}{2R}\tag{4.3.13}$$

Cómo se desea estimar la velocidad que relaciona las velocidades angulares con el radio, i.e., la velocidad tangencial \bar{v}_{rmr} . Se toma la ecuación (4.3.3) y se sustituye en la ecuación (4.3.13) obteniendo:

$$\omega = \frac{rw_r - rw_l}{2R},\tag{4.3.14}$$

de ésta manera se obtienen la relaciones (4.3.13),(4.3.2) que satisfacen la relación básica de *no deslizamiento de las ruedas*. Éstas relaciones se representan en forma matricial como,

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2R} & \frac{-r}{2R} \end{bmatrix}}_{\kappa} \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_l \end{bmatrix}\tag{4.3.15}$$

En la Figura 4.3 se ilustra la estructura del RMR en el marco inercial XOY . De este modo se comienza realizando el modelado cinemático y posteriormente el modelado dinámico. Se

muestra la estructura de la plataforma móvil, con sus dos ruedas laterales alineadas sobre un eje de dirección. El movimiento y orientación es realizado por medio de las ruedas laterales y sus actuadores (motores de corriente directa) independientes que tienen incorporados. Para determinar la posición de la plataforma móvil es necesario conocer la posición del punto G (Centro de gravedad) que se ilustra en la Figura 4.3 y que se describe en forma vectorial como:

$$\vec{OG} = \vec{OC} + \vec{CG} = \vec{OC} + d \cdot e^{j \cdot \theta} \quad (4.3.16)$$

La derivada de los vectores que describen la posición constituyen la relación de las velocidades para los puntos G y C , y están dados por la ecuación:

$$v_g = v_c + \frac{d}{dt} [d \cdot e^{j \cdot \theta}] \quad (4.3.17)$$

Considerando que $\dot{\theta} = \omega$ y derivando el segundo término se obtiene la siguiente ecuación completa de las velocidades:

$$v_g = v_c + d \cdot e^{j \cdot \theta} \cdot j \cdot \omega, \quad (4.3.18)$$

dado que la velocidad del punto C es $v_c = v \cdot e^{j \cdot \theta}$, se tiene que la velocidad del centro de gravedad G está dada por la ecuación:

$$v_g = (v + d \cdot j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \theta}, \quad (4.3.19)$$

de acuerdo al marco de referencia inercial XOY , la velocidad de centro de masa G puede ser expresado en forma cartesiana cómo:

$$v_g = \dot{x}_g + j \cdot \dot{y}_g. \quad (4.3.20)$$

Usando las ecuaciones (4.3.20) y (4.3.19) es posible expresar la parte real e imaginaria de la ecuación vectorial de la velocidad del centro de masa G como:

$$v_g = (v + d \cdot j \cdot \omega) \cdot (\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)), e^{j \cdot \theta} = (\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)), \quad (4.3.21)$$

al desarrollando la ecuación (4.3.21) se obtiene:

$$\begin{aligned} v_g &= v \cdot \cos(\theta) + j \cdot v \cdot \sin(\theta) + j \cdot \omega \cdot d \cdot \cos(\theta) + j^2 \cdot \omega \cdot d \cdot \sin(\theta) \\ &= \underbrace{(v \cdot \cos(\theta) - \omega \cdot d \cdot \sin(\theta))}_{\dot{x}_g} + j \cdot \underbrace{(v \cdot \sin(\theta) + \omega \cdot d \cdot \cos(\theta))}_{\dot{y}_g}. \end{aligned}$$

Del procedimiento anterior se obtienen las siguientes relaciones para las velocidades de \dot{x} y \dot{y} que están descritas en la ecuación (4.3.22).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cdot \cos(\theta) - \omega \cdot d \cdot \sin(\theta) \\ \dot{y} &= v \cdot \sin(\theta) + \omega \cdot d \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Es necesario eliminar el término de la velocidad v de las relaciones (4.3.22) para obtener la *restricción no holonómica*:

$$\begin{aligned}
& [\dot{x} = v \cdot \cos(\theta) - \omega \cdot d \cdot \sin(\theta)] \cdot [\sin(\theta)] \\
& [\dot{y} = v \cdot \sin(\theta) + \omega \cdot d \cdot \cos(\theta)] \cdot [-\cos(\theta)] \\
& \Downarrow \\
& \sin(\theta) \cdot \dot{x}_g = v \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) - d \cdot \omega \cdot \sin^2(\theta) \\
& + \\
& -\cos(\theta) \cdot \dot{y}_g = -v \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) - d \cdot \omega \cdot \cos^2(\theta) \\
& \hline
& \dot{x}_g \cdot \sin(\theta) - \dot{y}_g \cdot \cos(\theta) = -d \cdot \omega \cdot [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)], \tag{4.3.23}
\end{aligned}$$

finalmente se obtiene la restricción no holonómica para el RMR:

$$\dot{x}_g \cdot \sin(\theta) - \dot{y}_g \cdot \cos(\theta) + d \cdot \dot{\theta} = 0 \tag{4.3.24}$$

La restricción (4.3.24) expresa en términos físicos que el robot sólo puede moverse en dirección perpendicular respecto al eje de giro de las ruedas, siempre y cuando se cumpla la condición de *no deslizamiento de las ruedas*. Cuando el centro de masa de la plataforma móvil G coincide con su centro de rotación C , entonces, $d = 0$ y la relación (4.3.25) describe la restricción no holonómica del centro de giro como:

$$\dot{x}_g \cdot \sin(\theta) - \dot{y}_g \cdot \cos(\theta) = 0. \tag{4.3.25}$$

A partir del conocimiento de las relaciones 4.3.22 es posible definir la matriz jacobiana $S(q)_g$ que transforma las velocidades de las variables internas $v = [v \ w]^T$ a las velocidades en variables cartesianas $\dot{q}_g = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$:

$$S(q)_g = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -d \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & d \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.3.26)$$

entonces, la ecuación vectorial que describe del modelo cinemático del RMR se escribe como:

$$\dot{q}_g = S(q)_g \cdot v, \quad (4.3.27)$$

retomando las ecuaciones (4.3.15) y (4.3.27), se define el modelo cinemático del robot móvil en su forma explícita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cdot \cos(\theta) - \frac{d \cdot r}{2 \cdot R} \cdot \sin(\theta) & \frac{r}{2} \cdot \cos(\theta) + \frac{d \cdot r}{2 \cdot R} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{r}{2} \cdot \sin(\theta) + \frac{d \cdot r}{2 \cdot R} \cdot \cos(\theta) & \frac{r}{2} \cdot \sin(\theta) - \frac{d \cdot r}{2 \cdot R} \cdot \cos(\theta) \\ \frac{r}{2 \cdot R} & \frac{-r}{2 \cdot R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_l \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad (4.3.28)$$

Se puede notar que la ecuación cinemática del robot móvil establece que el movimiento del robot tiene 3 grados de libertad, mientras que el número de grados de libertad actuados son sólo 2, debido a la existencia de la restricción no holonómica característica de este sistema robótico.

4.4 Desarrollo del Modelo Dinámico del RMR de Configuración Diferencial

En esta sección se plantea el modelado dinámico de un RMR de configuración diferencial y su representación del modelo en su ecuación vectorial de movimiento. Se describe la relaciones dinámicas del centro de masa G y de las ruedas con sus respectivos actuadores. Se emplea la metodología de Newton-Euler para el desarrollo de las ecuaciones de movimiento contemplando las fuerzas y pares dinámicos generados por el robot móvil. Primero, debe obtenerse

la aceleración del centro de masa a_g derivando la ecuación de la velocidad del centro de masa (4.3.19):

$$\begin{aligned}
 a_g &= \frac{d}{dt} [(v + j \cdot d \cdot \omega) \cdot e^{j\theta}] \\
 &= \underbrace{(\dot{v} - d \cdot \dot{\theta}^2)}_{a_{g1}} \cdot \underbrace{e^{j\theta}}_{\theta} + j \cdot \underbrace{(v \cdot \dot{\theta} + d \cdot \ddot{\theta})}_{a_{g2}} \cdot \underbrace{e^{j\theta}}_{\theta}
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

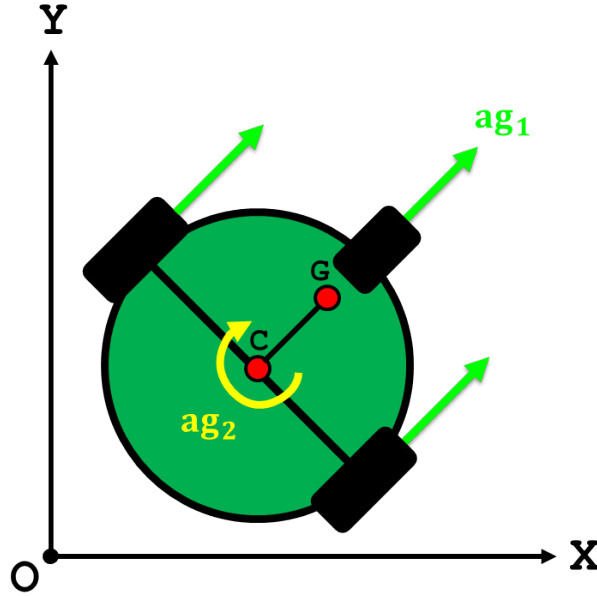


Figura 4.4: Componentes de aceleración radial (a_{g1}) y tangencial (a_{g2}) que provocan el movimiento del Robot Móvil

Al obtener la ecuación de la aceleración del centro de masa a_g se obtienen dos términos, mismos que se encuentran ilustrados en la figura 4.4. El primer término corresponde a la componente de aceleración radial a_{g1} que tiene la misma dirección que el desplazamiento y el segundo término es la componente de aceleración tangencial a_{g2} , denotados en la ecuación (4.4.1). La aceleración radial está expresada en su forma polar, con su correspondiente magnitud y ángulo:

$$a_{g1} = \left\| \dot{v} - d \cdot \dot{\theta}^2 \right\|, \angle a_{g1} = \theta \quad (4.4.2)$$

La fuerza que produce el desplazamiento radial es:

$$\begin{aligned} F_d &= m \cdot \|a_{g1}\| \\ &= m \cdot \dot{v} - m \cdot d \cdot \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

La aceleración tangencial a_{g2} también está expresada en su forma polar como:

$$a_{g2} = \left\| v \cdot \dot{\theta} + d \cdot \ddot{\theta} \right\|, \angle a_{g2} = \theta \quad (4.4.4)$$

El momento de torsión que genera el RMR al girar está dado como:

$$\begin{aligned} \tau_d &= F_T \cdot d = \tau_d = \|a_{g2}\| \cdot m \cdot d \\ \tau_d &= d^2 \cdot \ddot{\theta} \cdot m + d \cdot v \cdot \dot{\theta} \cdot m \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

agregando el término I_p que corresponde al momento de inercia de las rotaciones alrededor del centro de masa I_p , se tiene la ecuación completa del momento de torsión:

$$\tau_d = (I_p + d^2 \cdot m) \cdot \ddot{\theta} + m \cdot d \cdot v \cdot \dot{\theta}. \quad (4.4.6)$$

Acomodando matricialmente las ecuaciones de la fuerza que produce el desplazamiento (4.4.3) y el momento de torsión (4.4.6) que permite el movimiento completo del RMR se obtiene:

$$\tau_d = \begin{bmatrix} F_d \\ \tau_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & (I_p + m \cdot d^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} & \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m \cdot d \cdot \dot{\theta}^2 \\ m \cdot d \cdot v \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

Adicionalmente, es de nuestro conocimiento que estas fuerzas son generadas por los momentos de torsión de las ruedas izquierda y derecha (τ_{dl} y τ_{dr} , respectivamente). La relación de los momentos de torsión producidos por las ruedas con respecto a la fuerza radial producida por el RMR es:

$$F_d = \frac{1}{r} \cdot (\tau_{dl} + \tau_{dr}), \quad (4.4.8)$$

adicionalmente, existe otra relación de los momentos de torsión de las ruedas con respecto al momento de torsión del robot móvil generado por RMR, que es:

$$\tau_d = \frac{R}{r} \cdot (\tau_{dr} - \tau_{dl}). \quad (4.4.9)$$

Tomando en cuenta la expresión (4.4.7) y utilizando las ecuaciones (4.4.8), (4.4.9) se obtiene finalmente el modelo dinámico del robot móvil que no contempla fricciones ni la dinámica de los actuadores incorporados a las ruedas:

$$M\dot{v} + C(v)v = B \cdot \tau_d, \quad (4.4.10)$$

donde:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & (I_p + m \cdot d^2) \end{bmatrix} \quad \text{es la matriz de inercias (simétrica y positiva definida)} \quad (4.4.11)$$

$$C(v) = \begin{bmatrix} 0 & -m \cdot d \cdot \dot{\theta} \\ m \cdot d \cdot \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{es la matriz de coriolis y fuerzas centrípetas} \quad (4.4.12)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{r}{R} & -\frac{r}{R} \end{bmatrix} \quad \text{es la matriz de transformación de entradas} \quad (4.4.13)$$

El modelo dinámico completo se obtiene al considerar la dinámica de los actuadores (motores de corriente directa) de las ruedas del robot móvil, lo que da como resultado la ecuación vectorial de movimiento del RMR:

$$I_m \cdot \dot{\omega}_k + \tau_{dk} = \tau_{mk}, \quad \text{para } k = r, l \quad (4.4.14)$$

donde τ_{mk} son los momentos de torsión de las ruedas laterales que controlan el movimiento de las ruedas, I_m es el momento de inercia de cada rueda acoplada al eje del rotor en cada motor. Para definir el modelo dinámico completo se requiere considerar la matriz constante κ de la condición de rodamiento sin deslizamiento (4.3.15),

$$\kappa = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2R} & \frac{-r}{2R} \end{bmatrix}. \quad (4.4.15)$$

Su matriz inversa es:

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\kappa)} \begin{bmatrix} \frac{-r}{2} & \frac{-r}{2} \\ \frac{-r}{2R} & \frac{r}{2R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{R}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{-R}{r} \end{bmatrix}. \quad (4.4.16)$$

Se obtienen las velocidades angulares a partir de la ecuación matricial de la relación de *no deslizamiento de las ruedas* (4.3.15) y de 4.4.16,

$$w = \kappa^{-1} \cdot v \quad (4.4.17)$$

en donde v es el vector de velocidades del robot móvil y ω es el vector de velocidades angulares de cada una de las llantas, posteriormente se deriva ésta expresión obteniendo:

$$\dot{\omega} = \kappa^{-1} \cdot \dot{v}. \quad (4.4.18)$$

Sustituyendo la velocidad angular en la ecuación vectorial del modelo que no contempla las dinámicas de los actuadores (4.4.10) y despejando el momento de torsión τ_d se obtiene:

$$\tau_d = B^{-1} \cdot [M\dot{v} + C(v)v]. \quad (4.4.19)$$

Entonces, al sustituir ésta expresión del momento de torsión τ_d (4.4.19) en la ecuación de movimiento dinámica completa del RMR (4.4.14) se obtiene:

$$I_m \cdot \kappa^{-1} \cdot \dot{v} + B^{-1} \cdot [M\dot{v} + C(v)v] = \tau_{mr,ml}. \quad (4.4.20)$$

Simplificando el modelo se obtiene:

$$\begin{aligned} B \cdot (I_m \cdot \kappa^{-1} \cdot \dot{v} + B^{-1} \cdot [M\dot{v} + C(v)v]) &= B \cdot (\tau_{mr,ml}) \\ B \cdot I_m \cdot \kappa^{-1} \cdot \dot{v} + B \cdot B^{-1} \cdot [M\dot{v} + C(v)v] &= B \cdot \tau_{mr,ml} \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Tomando la ecuación (4.4.18) y sustituyendola en la ecuación desarrollada anteriormente se obtiene:

$$I_m \cdot B \cdot \kappa^{-1} \cdot \dot{v} + M\dot{v} + C(v) = B \cdot \tau_{mr,ml}, \quad (4.4.22)$$

en donde el producto $B \cdot \kappa^{-1} \cdot \dot{v}$ está dado como:

$$\begin{aligned} B \cdot \kappa^{-1} \cdot \dot{v} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{\dot{R}}{r} & \frac{-\dot{R}}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{R}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{-R}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{2R}{r^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

entonces el modelo dinámico completo del robot móvil de configuración diferencial está dado como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot I_m}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{2 \cdot I_m \cdot R}{r^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_p + m \cdot d^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m \cdot d \cdot \dot{\theta} \\ m \cdot d \cdot \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{\dot{R}}{r} & \frac{-\dot{R}}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{ml} \\ \tau_{mr} \end{bmatrix} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} m + \frac{2 \cdot I_m}{r^2} & 0 \\ 0 & I_p + m \cdot d^2 + \frac{2 \cdot I_m \cdot R}{r^2} \end{bmatrix}}_{M_r} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}}_{\dot{v}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -m \cdot d \cdot \dot{\theta} \\ m \cdot d \cdot \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}}_{C(v)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{\dot{R}}{r} & \frac{-\dot{R}}{r} \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_{ml} \\ \tau_{mr} \end{bmatrix}}_{\tau_{mr,ml}}, \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

finalmente, la ecuación dinámica vectorial del RMR de configuración diferencial y sus actuadores se define como:

$$M_r \dot{v} + C(v) v = B \cdot \tau_{mr,ml} \quad (4.4.25)$$

En este capítulo se obtuvo el modelado dinámico y cinemático de un robot móvil de configuración diferencial. El modelo del RMR SE desarrolló usando la metodología Newton-Euler para determinar las ecuaciones dinámicas que modelan su movimiento. El modelado contempla

la dinámica completa del robot móvil de tal modo que sea posible obtener resultados más aproximados al comportamiento real de este sistema robótico. Este modelo resultante es necesario para implementar la teoría de control enfocada en el control de seguimiento de trayectorias que se lleva a cabo en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Control del Robot Móvil de Configuración Diferencial

5.1 Introducción

La teoría de control permite aplicar diversas estrategias para el control de un RMR. En la robótica hay dos paradigmas de control que son de interés, el control de regulación (posición) y el control de trayectorias. Particularmente en este trabajo se enfoca en la implementación de estrategias de control para seguimiento de trayectorias. Dichas trayectorias de referencia son aquellas generadas por sistemas dinámicos deterministas con comportamientos complejos. La razón de utilizar trayectorias con estas características radica en las ventajas que se obtienen al implementarse en RMR dedicados a la realización de tareas de exploración y vigilancia, principalmente.

5.2 Tipos de Control

La robótica móvil es un área en constante desarrollo y que está siendo ampliamente investigada por su autonomía y versatilidad de uso en diversas aplicaciones. Unos de los mayores desafíos

es lograr un control preciso y robusto de este tipo de sistemas robóticos. Entre estos desafíos destacan el control de posición, seguimiento de trayectorias, estacionamiento autónomo de vehículos, evasión dinámica de obstáculos y colisiones, coordinación de varios robots, entre otros. Por lo tanto, resulta imprescindible conocer los tipos de control adecuados para robots móviles.

El control cinemático considera dos lazos de control: el principal dominador *cinemático* y otro *dinámico* de bajo nivel para los actuadores en las ruedas; es decir, existe un desacoplo entre la parte cinemática y la parte dinámica. El control cinemático es sencillo y su validez esta dada siempre y cuando el lazo de control dinámico sea más rápido que el lazo de control cinemático.

En el control dinámico no existen dos lazos, si no que la ley de control es única y considera todos los elementos del robot móvil: relaciones no-holonómicas, actuadores, masas, momentos de inercia, etc. El control dinámico tiene el inconveniente de que el análisis presenta un mayor grado de complejidad y también es sensible a los errores inyectados por la incertidumbre paramétrica de modelo, y en algunos casos, requiere de sensores inerciales, los cuales presentan poca robustez y poca precisión.

5.3 Control de Seguimiento de Trayectorias

El problema más recurrente en la robótica es sobre el control de seguimiento de trayectorias y en la literatura abundan muchos trabajos que se dedican a resolver este problema. Para realizar esta tarea existen algunos controladores que son ampliamente usados como el *control de par calculado*, el *control PD+* y el *control PD con compensación*.

Realizar el control de seguimiento en un robot implica que se mueve a lo largo de posiciones sucesivas que forman parte de una trayectoria deseada o de referencia con una velocidad dada por la derivada de la trayectoria. La exactitud, desempeño y robustez de los controladores que se describen anteriormente dependerán de que tan preciso es el conocimiento de los parámetros del modelo, en el caso de este trabajo, el modelo del RMR. Por lo tanto, los algoritmos de control

de movimiento o seguimiento que se tratarán a continuación contemplan en su estructura de control la dinámica completa y precisa del modelo del RMR.

5.4 Seguimiento en Variables de Desplazamiento D y Orientación θ

El problema de control de seguimiento de trayectorias planteado para esta sección consiste en determinar la función vectorial τ de tal modo que las variables de desplazamiento D y orientación θ sigan con exactitud la trayectoria de referencia.

Para el desarrollo del control se considera el modelo dinámico del RMR (4.4.25) en función de las variables de orientación y desplazamiento. Por lo tanto, estas variables conforman el vector de estados de la ecuación dinámica $[D^T \ v^T]^T$ reescribiéndose como,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ M_r^{-1}[B\tau(t) - C(v)v] \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

donde $M_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercias, $C(v)v \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas de Coriolis y fuerzas centrífugas y $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector de par de entrada que se aplican a las ruedas.

El objetivo de control que se plantea en esta sección es controlar el seguimiento de trayectorias para el RMR y se plantea de la siguiente manera. Se considera el modelo dinámico (4.4.25) y dado un conjunto de funciones vectoriales acotadas D_{ref} , v_{ref} y \dot{v}_{ref} que corresponden a la posición, la velocidad y aceleración, respectivamente. Lo que se desea lograr con el controlador es encontrar una función vectorial τ tal que el desplazamiento y la orientación asociada al RMR puedan seguir de manera precisa los desplazamientos y orientaciones de referencia, que corresponden a las trayectorias generadas por los sistemas dinámicos de referencia.

La descripción matemática del objetivo de control de seguimiento, la cuál se basa en encontrar

una función de pares de entrada τ tal que,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0 \quad (5.4.2)$$

en donde e está definido como el error de posición de orientación y desplazamiento o simplemente se le dice error de posición local del RMR, que lleva a reexpresar la ecuación de forma más explícita como,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D_{ref}(t) - D(t) = 0. \quad (5.4.3)$$

Del mismo mismo que se define el objetivo de control para la posición, también se conserva la misma definición para el error de velocidad \dot{e} del control de seguimiento,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{e} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_{ref}(t) - v(t) = 0 \quad (5.4.4)$$

La función de pares τ mencionada previamente, es una función vectorial en función de las variables de posición, velocidad y aceleración del RMR y a esta función también se le conoce como la “ley de control”. Al hablar del control de un sistema, es necesario entender que la información de posición D , velocidad v y aceleración \dot{v} debe conocerse, ya sea por medio de los sensores que miden estas variables o por estimación de sus valores ya que es información necesario para el controlador. La ley de control expresada en términos del modelo del RMR se define como,

$$\tau = \tau(D, v, \dot{v}, D_{ref}, v_{ref}, \dot{v}_{ref}, M_r, C(v)). \quad (5.4.5)$$

La ecuación de movimiento en lazo cerrado con la ley de control de seguimiento, por lo general se ilustra como en la Figura 5.1

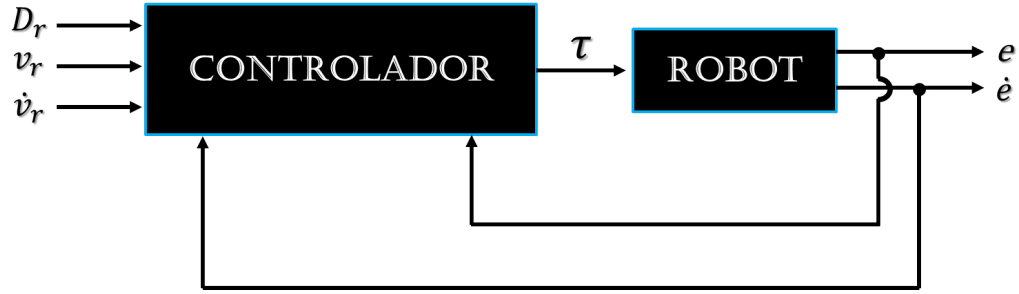


Figura 5.1: Sistema en lazo cerrado para el control de seguimiento.

En la siguiente sección se lleva a cabo la metodología necesaria para implementar el control de seguimiento para las variables de posición local del RMR (D y θ) para cada “*ley de control*”, entre las cuales se consideran las siguientes:

- **Control de Par Calculado**
- **Contro PD con compensación**

5.4.1 Controlador de Par Calculado

En el desarrollo del modelado del sistema de un RMR, se obtuvo la ecuación dinámica 4.4.25, se puede observar de este modelo que sus variables de estado están dadas por expresiones altamente no lineales. Mediante el *controlador de par calculado* o también conocido como de *linealización exacta por retroalimentación de estados*, el cual también es un control no lineal en las variables de estado, sin embargo, al representar el sistema del RMR con este controlador en lazo cerrado, se obtiene un modelo descrito por ecuaciones diferenciales lineales, i.e., es un control que linealiza al modelo dinámico del RMR. Este controlador es suficiente para alcanzar el objetivo de control de seguimiento globalmente, y se explica con más detalle en las secciones posteriores.

La ley de control de par calculado esta dada por,

$$\tau = B^{-1}(M_r[\dot{v}_{ref} + K_2\dot{e} + K_1e] + C(v)v), \quad (5.4.6)$$

donde K_1 y K_2 son matrices constantes positivas definidas que son denominadas *ganancias de retroalimentación* y en donde e se define como el error de posición que esta dado como $D_{ref} - D$ y \dot{e} es el error de velocidad dado como $v_{ref} - v$. La ley de control contiene las ganancias de retroalimentación multiplicadas por la matriz de inercias que dependen de la exactitud de los valores de los parámetros del modelo del RMR.

La ley de control de par calculado es una de las aproximaciones más sencillas y que ha sido ampliamente investigada, y se cataloga como ñla primera ley de control de seguimiento basada en el modelo dinámico y que que también es ampliamente usada en los robots manipuladores. La simpleza de esta ley de control trae consigo la desventaja de la dependencia explícita del conocimiento preciso de los valores de la matriz de inercias M_r , la matriz de coriolis y fuerzas centrífugas $C(v)$, y dado que el robot móvil se desplaza en contacto directo con la superficie no es afectado significativamente por las fuerzas gravitacionales. Adicionalmente, el controlador depende de la trayectoria de referencia $D_{ref}(t)$, y sus derivadas $v_{ref}(t)$ y \dot{v}_{ref} , además, del conocimiento de los valores de posición $D(t)$ y velocidad $v(t)$ del RMR.

El primer paso que se debe seguir en la metodología de la implementación de cualquier controlador es obtener la ecuación en lazo cerrado por medio de la sustitución de la ley de control en el modelo dinámico del sistema que se va a controlar, en este caso, el modelo dinámico del RMR (4.4.25).

Al sustituir la ley de control (5.4.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} M_r\dot{v} + C(v)v &= B\langle B^{-1}(M_r[\dot{v}_{ref} + K_2\dot{e} + K_1e] + C(v)v) \rangle \\ M_r\dot{v} &= M_r[\dot{v}_{ref} + K_2\dot{e} + K_1e], \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

donde (5.4.7) es la ecuación en lazo cerrado. Ya que se conoce que la matriz M_r es constante y positiva definida, por lo tanto, tiene inversa, la ecuación (5.4.8) se reduce a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\dot{v}_{ref} - \dot{v} &= -K_2\dot{e} - K_1e \\ \ddot{e} &= -K_2\dot{e} - K_1e,\end{aligned}\tag{5.4.8}$$

al reexpresar esta ecuación en en espacio de estados, donde el vector de estados se define como los errores de posición y velocidad $[e^T \ \dot{e}^T]^T$ quedando como,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{e} \\ -K_1e - K_2\dot{e} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.4.9}$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. La ecuación en lazo cerrado resultante (5.4.9) está representada por una ecuación diferencial lineal y autónoma.

En la Figura 5.2 se ilustra el diagrama de bloques del sistema del RMR en lazo cerrado con la adición del control de par calculado.

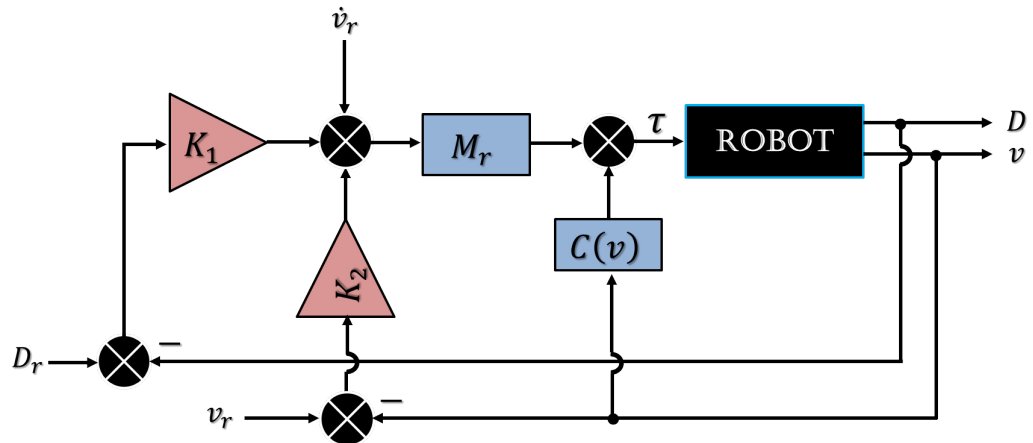


Figura 5.2: Diagrama de bloques del controlador de par calculado para el modelo dinámico del RMR.

Punto de Equilibrio

A continuación es necesario realizar el análisis existencia y posible unicidad del punto de equilibrio del sistema.

Partiendo de la ecuación en lazo cerrado (5.4.9), con el vector de estados dado por los errores de posición y velocidad:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{e} \\ -K_1 e - K_2 \dot{e} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{e} \\ -K_1 e - K_2 \dot{e} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Por lo tanto se deduce que su único punto de equilibrio es $[e^T \ \dot{e}^T]^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$, es decir, el origen. Además, la unicidad del punto de equilibrio viene establecida por los requerimientos de que las matrices de ganancias de retroalimentación sean constantes y positivas definidas, i.e., no singulares.

Análisis de Estabilidad en el Punto de Equilibrio

Por simple inspección se puede notar que la ecuación dinámica con el controlador de seguimiento de par calculado en lazo cerrado es una ecuación vectorial lineal y autónoma, lo que garantiza que cualquier solución tiene a cero ante cualquier condición inicial, siempre y cuando los valores propios de la matriz $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ de la ecuación en lazo cerrado (5.4.9) tengan parte real negativa.

Las matrices de ganancias de retroalimentación permiten reubicar los polos de la matriz A por medio de ajustes en sus valores. El polinomio característico de la matriz A está dado por,

$$sI - A = \begin{bmatrix} sI & 0 \\ 0 & sI \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I \\ K_1 & -K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI & -I \\ K_1 & sI + K_2 \end{bmatrix} = s^2I + K_2s + K_1, \quad (5.4.11)$$

dado que K_1 , K_2 pueden tener n polinomios característicos por cada variable de estado,

$$s^2I + K_{2n}s + K_{1n} = 0, \quad (5.4.12)$$

además, tomando que estos polinomios están formados por autovalores λ_{1n} , λ_{2n} . Al definir una ecuación cuadrática de modo que las raíces sean negativas, de tal modo que estas raíces se definan como los autovalores del polinomio característico (5.4.12),

$$(s + \lambda_{1n})(s + \lambda_{2n}) = s^2 + (\lambda_{1n} + \lambda_{2n})s + \lambda_{1n}\lambda_{2n}. \quad (5.4.13)$$

De este modo, se puede construir la matriz de ganancias de retroalimentación como,

$$\begin{aligned} K_{1n} &= \lambda_{1n}\lambda_{2n} \\ K_{2n} &= \lambda_{1n} + \lambda_{2n} \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Con este método de selección para los valores de las ganancias de retroalimentación se asegura que los autovalores de la ecuación en lazo cerrado (5.4.9) tienen parte real negativa, es decir, la matriz A es *Hurwitz*, lo que garantiza la *estabilidad asintótica global* del sistema.

5.4.2 Controlador PD+

El *controlador PD+* es una variante de la estrategia de control de posición más ampliamente usada, el *controlador PD convencional*, sin embargo, se modifican términos y análisis posteriores para ser utilizado en el control de seguimiento. Esta “*ley de control*” permitirá alcanzar el objetivo de control deseado (5.4.4), en forma global. La *ley de control PD+* está expresada por

$$\tau = B^{-1}[K_p e + K_v \dot{e} + M_r \dot{v}_{ref} + C(v)v_{ref}], \quad (5.4.15)$$

donde las matrices de ganancias proporcional y derivativas, $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas y positivas definidas definidas por el usuario. Para este controlador también se utilizan los errores de posición $e = D_{ref} - D$ y velocidad $\dot{e} = v_{ref} - v$. La matriz de fuerzas de Coriolis y de fuerzas centrífugas $C(v)$ debe ser escogida usando los *simbolos de Christoffel*. De este modo se asegura que la matriz compuesta por la matriz de inercias y la matriz de fuerzas de Coriolis y fuerzas centrífugas $\frac{1}{2}M_r - C(v)$ es una matriz antisimétrica, lo cuál es una característica importante de esta matriz al realizar el análisis de estabilidad.

Al igual que el controlador de par calculado, la implementación de la *ley de control PD+* esta basada en el conocimiento preciso de los parámetros del modelo del RMR, i.e., conocer con precisión las matrices M_r y $C(v)$. Además, también es necesario conocer las trayectorias de referencia deseadas $D_{ref}(t)$, sus velocidades $v_{ref}(t)$, aceleraciones $\dot{v}_{ref}(t)$ y los valores medidos o estimados de la posición local $D(t)$ y velocidad local $v(t)$ del RMR.

Se procede a realizar la misma metodología que se llevo a cabo en la sección del *controlador de par calculado*. Primero es necesario determinar la ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico con el control de seguimiento, la cual se obtiene al sustituir la expresión de la “*ley de control PD+*” (5.4.15) en la ecuación en lazo abierto del modelo dinámico del RMR (4.4.25),

$$\begin{aligned} M_r \dot{v} + C(v)v &= B[B^{-1}(K_p e + K_v \dot{e} + M_r \dot{v}_{ref} + C(v)v_{ref})] \\ M_r(\dot{v}_{ref} - \dot{v}) + C(v)(v_{ref} - v) &= -K_p e - K_v \dot{e} \\ M_r(\ddot{e}) + C(\dot{e})(\dot{e}) &= -K_p \dot{e} - K_v \ddot{e}, \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

donde (5.4.16) es la ecuación en lazo cerrado. La ecuación de lazo cerrado queda expresada en términos del vector de estados $[e^T \dot{e}^T]^T$ y resulta en la siguiente expresión,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ M_r^{-1}[-K_p e - K_v \dot{e} - C(\dot{e})\dot{e}] \end{bmatrix} \quad (5.4.17)$$

Se puede notar que la ecuación en lazo cerrado resultante es una ecuación diferencial vectorial no lineal y *no autónoma*, i.e., depende explícitamente de las variables temporales $D_{ref}(t)$ y $v_{ref}(t)$.

En la Figura 5.3 se ilustra el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado con esta ley de control que se desea implementar.

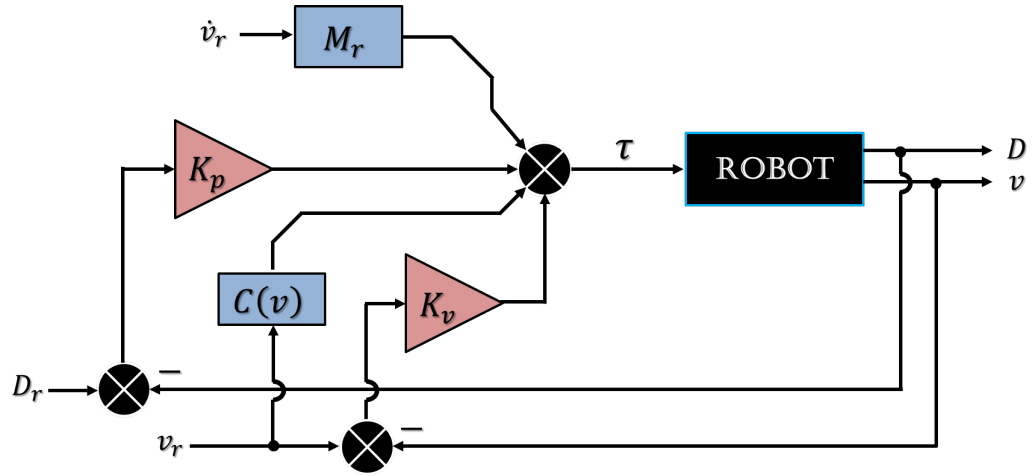


Figura 5.3: Diagrama de bloques del controlador PD+ para el modelo dinámico del RMR.

Punto de Equilibrio

Para este controlador también se realiza el análisis para determinar la existencia y posible unicidad del punto de equilibrio del sistema del RMR con el *controlador PD+*, tal y como se llevo a cabo para el control de par calculado.

Partiendo de la ecuación en lazo cerrado (5.4.17), con el vector de estados dado por los errores de posición y velocidad $[e^T \dot{e}^T]^T$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{e} \\ M_r^{-1}[-K_p e - K_v \dot{e} - C(\dot{e})\dot{e}] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{e} \\ M_r^{-1}[-K_p e - K_v \dot{e} - C(\dot{e})\dot{e}] \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.4.18)$$

Por lo tanto se deduce que el único punto de equilibrio es $[e^T \dot{e}^T]^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$, i.e., el *origen*. Además, la unicidad del punto de equilibrio viene establecida por los requerimientos de que las matrices de ganancias proporcional y derivativa sean constantes y positivas definidas, por lo tanto, son no singulares. En base a lo anterior aplicando el análisis para hallar el equilibrio de del sistema en lazo cerrado (5.4.17), se deduce que el único modo de que el sistema se encuentre en su posición de equilibrio es que el error de posición y velocidad sea igual a cero. Es decir, los valores de posición y velocidad deben ser tales que, $D(0) = D_{ref}(0)$, $v(0) = v_{ref}(0)$, entonces $D(t) = D_{ref}(t)$ y $v(t) = v_{ref}(t)$ para todo $t \geq 0$. Sin embargo, para establecer formalmente el equilibrio para todos los casos, por ejemplo, el caso donde $D(0) \neq D_{ref}(0)$ o $v(0) \neq v_{ref}(0)$ se necesita realizar el análisis de estabilidad en el punto de equilibrio.

Análisis de Estabilidad en el Punto de Equilibrio

La estabilidad del único punto de equilibrio del sistema (el *origen*) se puede comprobar haciendo uso de una función candidata de Lyapunov definida como:

$$V(t, e, \dot{e}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (5.4.19)$$

$$V(t, e, \dot{e}) = \frac{1}{2} \dot{e}^T M_r \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e, \quad (5.4.20)$$

donde esta función candidata de Lyapunov es definida positiva debido a que la matriz de inercias M_r y la matriz de ganancia proporcional K_p también son positivas definidas. Al derivar la expresión de la función candidadata de Lyapunov (5.4.20) se obtiene,

$$\dot{V}(t, e, \dot{e}) = \frac{1}{2}[\dot{e}^T K_p e + e^T \dot{K}_p e + e^T K_p \dot{e}] + \frac{1}{2}[\ddot{e}^T M_r \dot{e} + \dot{e}^T \dot{M}_r \dot{e} + \dot{e}^T M_r \ddot{e}] \quad (5.4.21)$$

Dado que la matriz de ganancias proporcional es una matriz constante, el término que implica la derivada de esta matriz es igual a cero y queda la expresión,

$$\dot{V}(t, e, \dot{e}) = \frac{1}{2}[\dot{e}^T K_p e + e^T K_p \dot{e}] + \frac{1}{2}[\ddot{e}^T M_r \dot{e} + \dot{e}^T \dot{M}_r \dot{e} + \dot{e}^T M_r \ddot{e}]. \quad (5.4.22)$$

A modo de simplificar más la ecuación de la derivada de la función candidata de Lyapunov, es obvia la deducción que implica que los términos $\dot{e}^T K_p e$ y $e^T K_p \dot{e}$ resultan ser el mismo valor escalar, y pueden sumarse de forma directa, lo mismo sucede con los términos $\ddot{e}^T M_r \dot{e}$ y $\dot{e}^T M_r \ddot{e}$, reduciendo la expresión de la derivada,

$$\dot{V}(t, e, \dot{e}) = e^T K_p \dot{e} + \frac{1}{2}\dot{e}^T \dot{M}_r \dot{e} + \dot{e}^T M_r \ddot{e}. \quad (5.4.23)$$

Al realizar la sustitución del término $M_r \ddot{e}$ que se obtiene de la ecuación de lazo cerrado (5.4.17), así como también, por medio de las propiedades del modelo dinámico del RMR,

$$\dot{e}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}_r - C(\dot{e}) \right] \dot{e} = 0, \quad (5.4.24)$$

se simplifica la ecuación de la derivada de la función candidata de Lyapunov a la siguiente expresión,

$$\dot{V}(t, e, \dot{e}) = -\dot{e}^T K_v \dot{e} \quad (5.4.25)$$

$$= - \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.4.26)$$

A partir del *Teorema de LaSalle* se concluye inmediatamente la estabilidad del origen $[e^T \dot{e}^T]^T = 0$, y con apoyo del mismo teorema, se concluye que el estado permanece acotado. Dado que la ecuación de lazo cerrado del sistema con el *controlador PD+* (5.4.17) es *no autónoma* $q_d = q_d(t)$, por lo tanto, no es posible establecer la estabilidad global asintótica usando este teorema.

Como se menciona previamente, en algunos casos no es posible asegurar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio, sin embargo, el siguiente lema es muy útil cuando se hace uso de las funciones candidatas de Lyapunov, permite demostrar que las soluciones están acotadas y que las variables de estados son convergentes. A pesar de que esta propiedad nos permite evaluar y concluir sobre el comportamiento convergente y acotado del sistema, no es una propiedad muy fuerte que permita asegurar la estabilidad global asintótica, aún así es una herramienta muy útil para establecer más rigurosamente la estabilidad del lazo de control.

Lema 5.4.1. *Considere las siguientes funciones continuamente diferenciables $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $P : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$. Asumiendo que $P(t)$ es una matriz definida positiva simétrica para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y también es continua. Se define la función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ como:*

$$V(t, x, z, h) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T P(t) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + h(t) \geq 0. \quad (5.4.27)$$

Si la derivada total de $V(t, x, z, h)$, i.e.

$$\dot{V}(t, x, z, h) = \frac{\partial V(t, x, z, h)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x, z, h)^T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(t, x, z, h)^T}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{dh}{dt}, \quad (5.4.28)$$

satisface, para todo $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ y $h \in \mathbb{R}_+$,

$$\dot{V}(t, x, z, h) = - \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.4.29)$$

cuando $Q(t) = Q^T(t) > 0 \forall t \geq 0$ entonces,

1. $x(t)$, $z(t)$ y $h(t)$ están acotadas para todo $t \geq 0$ y

2. $x(t)$ es integrable al cuadrado, i.e.

$$\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt < \infty. \quad (5.4.30)$$

Si además, \dot{x} también está acotado entonces se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (5.4.31)$$

Por lo tanto, haciendo uso del Lema 5.4.1 se puede concluir que los errores de posición y velocidad permanecen acotados y que el error de la velocidad es integrable al cuadrado, es decir, satisface lo siguiente:

$$\int_0^\infty \|\dot{e}(t)\|^2 dt < \infty. \quad (5.4.32)$$

En relación con lo anterior, se demuestra que el error de velocidad \dot{e} tiene asintóticamente a cero. Por lo tanto, tomando \ddot{e} de la ecuación de lazo cerrado (5.4.17),

$$\ddot{e} = M_r^{-1}[-K_p e - K_v \dot{e} - C(\dot{e})\dot{e}] \quad (5.4.33)$$

se puede notar que los términos del lado derecho se encuentran acotados debido a que, se conoce que $e(t)$ y $\dot{e}(t)$, están acotados y que M_r y $C(q)$ son matrices acotadas que debido a que sus argumentos también lo están. Debido a la característica de acotamiento de e y \dot{e} , se tiene que $D(t) = -e(t) + D_{ref}(t)$ y $v(t) = -\dot{e}(t) + v_{ref}(t)$ también se encuentran acotados dado que la posición de referencia D_{ref} y la velocidad de referencia v_{ref} también son funciones vectoriales acotadas. Tomando en cuenta estas consideraciones, el error de aceleración $\ddot{e}(t)$ de la expresión (5.4.33) es una función vectorial con respecto al tiempo que también está acotada. A través de lo establecido anteriormente y haciendo uso del Lema 5.4.1 se puede concluir que la velocidad gradualmente tiende al equilibrio,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (v_{ref}(t) - v(t)) = 0 \in \mathbb{R}^n. \quad (5.4.34)$$

Aunque se realizó un análisis riguroso para determinar estabilidad, tal y cómo se menciona previamente, sólo se comprueba una propiedad débil de estabilidad, i.e., no es posible concluir el comportamiento asintótico del error de posición e . Para lograr esto, es necesario probar la estabilidad asintótica del sistema. Una de las formas posibles de realizar esta comprobación es mediante el uso del *Teorema de Matrosov*, el cual es utilizado para analizar las *ecuaciones diferenciales no autónomas*. Este teorema en particular es muy útil para este caso donde se obtiene que la derivada de la función candidata de Lyapunov es *semidefinida negativa*. En la sección de anexos se realizará el análisis de estabilidad completo, ya que la demostración completa de la estabilidad global asintótica de este controlador es muy extensa y podría desviar el enfoque sobre el objetivo principal de este trabajo de tesis.

5.5 Seguimiento en Variables Cartesianas (x_g, y_g)

En esta sección se implementa un control de seguimiento para el sistema (4.4.25). Se discute la implementación de un *controlador linealizante*, similar al *controlador de par calculado*, donde se obtiene que lazo de cerrado de control por medio de una retroalimentación de estados dinámica linealiza la dinámica no lineal del sistema.

Sin embargo, no es posible controlar la posición cartesiana del RMR a través del modelo (4.4.25), el cual está en función de las coordenadas de posición local, lo cual también está relacionado a la controlabilidad limitada que caracteriza a este sistema roótico con restricciones no holonómicas, además, su cinemática y dinámica se encuentran desacopladas. Por lo tanto, para lograr el objetivo de control de seguimiento (5.4.4) es necesario aplicar un *difeomorfismo* a la ecuación dinámica del RMR para obtener un modelo en función de las variables de posición cartesiana.

El modelo cinemático del RMR tiene la forma $\dot{q} = S_q v$ donde q es el vector de las variables de estado cuyas n componentes $q \in \mathbb{R}^n$ depende de la configuración y v es el vector de velocidades de control. Las configuraciones son caracterizadas por par (δ_m, δ_d) donde δ_m es el grado de movilidad y δ_d es el grado de direccionamiento [52]. El grado de movilidad está dado por la relación $\delta_m - nr$, donde nr es el número de restricciones de movilidad. El grado de direccionamiento δ_d está definido por el número de ruedas direccionales. Para el caso del robot móvil con ruedas fijas y configuración diferencial se tiene que $\delta_d = 0$ y $\delta_m = 2$, ya que posee una restricción no holonómica (4.3.24). Por lo tanto, el robot de configuración diferencial que analizamos está determinado por el par $(2, 0)$.

La estructura del RMR no tiene ruedas orientables, por lo tanto el vector de velocidades de control coincide con el grado de movilidad $\delta_m = 2$. En [8] ya se ha demostrado que la matriz de controlabilidad tiene un rango $\delta_m + \delta_d$. Dado que un RMR de configuración diferencial tiene rango, descarta un grado de movilidad y por lo tanto *no es completamente controlable*.

La *controlabilidad* en los sistemas no lineales está establecida por el un concepto conocido como el *grado relativo* del sistema. El modelo dinámico del RMR (4.4.25) se reexpresa para los análisis posteriores en la *forma no lineal afín al control*,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.5.1}$$

Se define el vector de estados del sistema; El vector de estados de posición cartesiana del RMR es $x_1 = [x_g^T \ y_g^T \ \theta^T]^T$, el vector de estados que describe la posición local del RMR es $x_2 = [D^T \ \theta^T]^T$, el vector de velocidades locales del RMR es $x_3 = [v^T \ \dot{\theta}^T]^T$ y donde u es la función vectorial de pares τ que se busca para controlar al RMR, entonces

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{q} = S_q(x_2)x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= M_r^{-1}[Bu - C(x_3)] = M_r^{-1}B\tau - M_r^{-1}C(x_3)
\end{aligned} \tag{5.5.2}$$

donde,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{bmatrix} S_q(x_2)x_3 \\ x_3 \\ M_r^{-1}C(x_3) \end{bmatrix} \\
g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_r^{-1}B \end{bmatrix} \\
h(x) &= x_1 \in \mathbb{R}^2
\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

La ecuación dinámica del RMR ahora queda expresado en la ecuaciones (5.5.1) y (5.5.3) en su forma no lineal afín al control. La controlabilidad del sistema (5.5.1) se describen en base a lo anteriormente descrito, donde se relacionan los grados de movilidad y de direccionamiento. Las siguientes definiciones son útiles para asegurar rigurosamente que el sistema es controlable por estos métodos de control.

El modelo dinámico es un sistema no lineal, el cuál esta expresado en variables de posición local del RMR, dado que se desea controlar la posición absoluta o cartesiana, por este motivo, es necesario aplicar transformaciones a los estados no lineales del modelo dinámico, así como también, la aplicación de transformaciones de retroalimentación para linealizar el sistema del RMR. Se define brevemente la definición de difeomorfismo, esta transformación que se usa en el modelo se le conocen como *derivadas de Lie*.

Definición 5.5.1 (Difeomorfismos). [41] Sea p un punto en E^n , el espacio Euclidiano n -dimensional, y U una vecindad de p . Sea $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ un mapeo uno a uno y biyectivo. Si $\varphi(x)$ y $\varphi^{-1}(x)$

son mapeos continuamente diferenciables \mathcal{C}^∞ (**mapeos suaves**), φ es llamado un **difeomorfismo**. Si $\varphi(x)$ y $\varphi^{-1}(x)$ están definidos en \mathbb{R}^n y son mapeos suaves, entonces φ es además un **difeomorfismo global**.

Definición 5.5.2 (Derivadas Lie). [41] Si f es un campo vectorial suave en U y h una función suave en U entonces $f(h)$ es la función suave en U definida por

$$f(h)(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right) (p).$$

Un campo vectorial puede ser interpretado como un operador que mapea la función h en la función $f(h)$. La función $f(h)$ es llamada la **derivada Lie** de la función h a lo largo del campo vectorial f ; es usualmente denotado como $L_f h$. La derivada Lie $L_f h$ de una función suave h a lo largo de un campo vectorial f es también denotado por $\langle dh, f \rangle$. Las derivadas Lie repetitivas a lo largo del mismo campo vectorial f son denotadas como $L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h)$, $L_f^1 h = L_f h$, $L_f^0 h = h$.

El conjunto de todos los campos vectoriales \mathcal{C}^∞ en U es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y sobre $\mathcal{C}^\infty(p)$, i.e.

$$L_{\alpha f_1 + \beta f_2} h = \alpha L_{f_1} h + \beta L_{f_2} h$$

donde $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(p)$.

La ecuación del sistema dinámico satisface las condiciones necesarias requeridas para la aplicación del difeomorfismo de las *derivadas de Lie*, i.e., las soluciones de su ecuación diferencial están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

El difeomorfismo (5.5.2) aplicado al sistema (5.5.1),

- $i = 0$

$$\begin{aligned} L_g L_f^0 h &= L_g h = \langle dh, g \rangle \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_r^{-1} B \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

- $i = 1$

$$\begin{aligned} L_f h &= \langle dh, f \rangle \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_q(x_2)x_3 \\ x_3 \\ -M_r^{-1}C(x_3) \end{bmatrix} = S_q(x_2)x_3, \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
Lg L_f^{(1)} h &= \langle d(S_q(x_2)x_3), g \rangle \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial S_q(x_2)x_3}{\partial x_{x_2}} & S_q(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_r^{-1}B \end{bmatrix} = S(x_2)x_3 M_r^{-1}B \neq 0
\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

$$\rho - 1 = i$$

$$\rho - 1 = 1$$

$$\rho = 2 \tag{5.5.7}$$

donde $\rho = 2$ es la *controlabilidad* del sistema y coincide con la relación $\delta_m + \delta_d = 2$, por lo tanto

$$\text{rank} \begin{bmatrix} df \\ dL_f h \\ dL_f^2 h \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial S_q(x_2)x_3}{\partial x_{x_2}} & S_q(x_2) \end{bmatrix} = 2. \tag{5.5.8}$$

$$\begin{aligned}
L_f^\rho h &= L_f^2 h \\
&= L_f L_f h \\
&= L_f(S_q(x_2)) \\
&= \langle d(S_q(x_2)x_3), f \rangle \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial S_q(x_2)x_3}{\partial x_{x_2}} & S_q(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_q(x_2)x_3 \\ x_3 \\ -M_r^{-1}C(x_3) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.5.9}$$

A continuación se definen algunas propiedades que son particularmente útiles para describir al sistema que se desea transformar de coordenadas locales a las coordenadas deseadas de control.

Definición 5.5.3 (Grado Relativo). [41] El grado relativo ρ del sistema (5.5.1) se define como el entero tal que,

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &= 0, \quad \forall x \in U_0, \quad 0 \leq i \leq \rho - 2 \\ L_g L_f^i h(x) &\neq 0, \quad \forall x \in U_0 \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

en donde U_0 es una vecindad del origen, si:

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \quad \forall x \in U_0, \quad \forall i \geq 0 \quad (5.5.11)$$

se dice que $\rho = \infty$.

En la definición anterior se define el grado relativo alrededor del origen, sin embargo, esta definición puede generalizarse para cualquier otro punto del espacio \mathbb{R}^n a través de la siguiente definición.

Definición 5.5.4 (Grado Relativo Global). [41] El grado relativo global ρ del sistema (5.5.1) se define como el entero tal que,

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq i \leq \rho - 2 \\ L_g L_f^i h(x) &\neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

si:

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \geq 0 \quad (5.5.13)$$

se dice que $\rho = \infty$

Nota 5.5.1. [41] El grado relativo ρ es invariante bajo la acción de transformaciones de retroalimentación de estados no lineales. La condición (5.5.13) es independiente de cualquier cambio de coordenadas locales. La retroalimentación de estado $u = k(x) + \beta(x)v$ transforma f en

$\tilde{f} = f + kg$ y g en $\tilde{g} = \beta g$. Su $L_g h = 0$, entonces también $L_{\tilde{g}} = \beta(L_g h) = 0$. Procediendo por inducción: supóniéndose que

$$L_g L_f^i h = 0, \quad 0 \leq i \leq j \quad (5.5.14)$$

lo que implica que $L_f^i h = L_{\tilde{f}}^i h$, $1 \leq i \leq j + 1$; se afirma que si

$$L_g L_f^{j+1} h = 0 \quad (5.5.15)$$

entonces

$$L_{\tilde{g}} L_{\tilde{f}}^{j+1} h = 0 \quad (5.5.16)$$

entonces, las suposiciones (5.5.15) y (5.5.16) implican

$$L_{\tilde{g}} L_{\tilde{f}}^{j+1} h = \beta L_g (L_f^{j+1} h) = 0 \quad (5.5.17)$$

De forma similar, si $L_g L_f^{\rho-1} h \neq 0$, entonces $L_{\tilde{g}} L_{\tilde{f}}^{\rho-1} h \neq 0$.

Nota 5.5.2. [41] El grado relativo ρ es igual al orden menor de la derivada de salda respecto al tiempo en la que aparece la entrada u con un coeficiente no nulo. Entonces para el sistema (5.5.1),

$$y^{(p)} = \frac{d^p h(x)}{dt^p} = L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h \quad (5.5.18)$$

donde el coeficiente de u es $L_g L_f^{\rho-1} h \neq 0$ en U_0 . Si $\rho = \infty$, las derivadas en el tiempo de y de cualquier orden no son afectadas por la entrada u para cualquier $x \in U_0$.

Los siguiente lemas sirven para definir el modelo dinámico en términos de las coordenadas de posición cartesianas que serán útiles para el control linealizante con grado relativo $\rho < \infty$.

Lema 5.5.1. [41] Supóngase que $\rho < \infty$ para el sistema (5.5.1). Entonces $\rho \leq n$ y

$$\text{rank}\{dh(x), \dots, d(L_f^{i-1}h(x))\} = i. \quad \forall x \in U_0$$

para cada $i = 1, \dots, \rho$.

Lema 5.5.2. [41] Supóngase que $\rho \leq \rho$ para el sistema. Entonces existen $n - \rho$ funciones $\xi_i(x)$, $1 \leq i \leq n - \rho$, tal que:

i Las funciones

$$\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x), h(x), \dots, L_f^{\rho-1}h(x)$$

forman un difeomorfismo local cerca del origen;

ii $\langle d\xi_i, g \rangle = 0$, $0 \leq i \leq n - \rho$. En coordenadas locales

$$\begin{aligned} (\xi, z) &= (\xi(x), z(x)) = (\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x), z_1(x), \dots, z_p(x)) \\ &= (\xi_1(x), \dots, \xi_{n-\rho}(x), h(x), \dots, L_f^{\rho-1}h(x)) \end{aligned}$$

el sistema (5.5.1) se expresa en la forma de seguimiento (también llamada forma normal)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \phi(\xi, z) \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, & 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + u L_g L_f^{\rho-1} h \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{5.5.19}$$

Si, adicionalmente, el grado relativo global ρ esta bien definido con $\rho \leq n$ y

iii los campos vectoriales

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} g, \quad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} g$$

son completos, entonces existe un difeomorfismo global que transforma (5.5.1) en la forma de seguimiento (5.5.19).

Nota 5.5.3. [41] Las funciones $\xi_1(x), \xi_{n-\rho}(x)$ son elegidas explícitamente tales que $\langle d\xi_i, g \rangle = 0$, $1 \leq i \leq n - \rho$. Por otro lado, si las coordenadas locales $(h, \dots, L_f^{\rho-1}h, \xi_1, \dots, \xi_{n-\rho})$ son determinadas simplemente por las funciones escogidas $\xi_1, \dots, \xi_{n-\rho}$ tales que

$$\text{rank}\{dh, \dots, d(L_f^{\rho-1}h), d\xi_1, \dots, d\xi_{n-\rho}\} = n,$$

en tales coordenadas locales el sistema se expresa como

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \phi_1(\xi, z) + \phi_2(\xi, z)u \\ \dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + uL_g L_f^{\rho-1}h \\ y &= z_1\end{aligned}\tag{5.5.20}$$

Lema 5.5.3. [41] *Si el sistema (5.5.1) tiene grado relativo $\rho \leq n$, entonces es localmente parcialmente linealizable por retroalimentación de estado con índice ρ .*

Si $\rho \leq n$, por la aplicación del Lema 5.5.2, el sistema (5.5.1) se expresa en las nuevas coordenadas (ξ, z) y quedar expresado en la forma de seguimiento (5.5.19).

5.5.1 Controlador Linealizante por Geometría Diferencial

El control de seguimiento de esta sección tiene como objetivos principales el *seguimiento* y la *estabilización* del RMR alrededor de una trayectoria, de tal modo que sea posible dotarle un comportamiento caótico, como una partícula con movimiento Browniano, o bien, una combinación de ambos tipos de comportamiento.

El sistema transformado con el *difeomorfismo de derivadas de Lie* (5.5.2) expresa el sistema en su forma de seguimiento normal,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \dot{x}_2 = x_3 = S_q^{-1}(\xi_1)z_2 \\ \dot{z}_1 &= S_q(x_2)x_3 = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{\partial S_q(x_2)x_3}{\partial x_{x_2}} - S_q(x_2)M_r^{-1}C(x_3) + S_q(x_2)M_r^{-1}Bu \\ y &= z_1\end{aligned}\tag{5.5.21}$$

el modelo en la *forma de seguimiento* queda definido como,

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= S_q^{-1}(\xi_1)z_2 \\
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= \dot{S}_q(\xi_1)S_q^{-1}(\xi_1)z_2 - S_q(\xi_1)M_r^{-1}C(\xi_1) + S_q(\xi_1)M_r^{-1}Bu \\
y &= z_1
\end{aligned} \tag{5.5.22}$$

Al desarrollar el procedimiento se transforma el modelo del RMR (4.4.25) a un sistema con los estados (ξ, z) (5.5.22), de este modo, el control por retroalimentación de estados u permite linealizar el modelo dinámico del RMR, con índice $\rho \leq n$, definido por

$$u = \frac{-L_g^\rho h(y_r, \xi_1)}{L_g L_f^{\rho-1} h(y_r, \xi_1)} + \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(y_r, \xi_1)} \nu \tag{5.5.23}$$

donde ν es conocido como el control auxiliar para el sistema linealizado:

Para la implementación de este tipo de controladores estabilizantes y de seguimiento para sistemas no lineales como el del RMR, al aplicar la ley de control linealizante, la estabilización se realiza alrededor del punto de equilibrio. Esto incluye al problema de seguimiento cuando $y_r(t) = 0$. Los siguientes definiciones y teoremas garantizan que el control de seguimiento por medio de retroalimentación de estados que se diseñó en esta sección para el sistema (5.5.1) permite realizar el seguimiento de las trayectorias de referencia.

Definición 5.5.5 (Seguimiento por Retroalimentación de Estados Estática). [41] Dada una señal de referencia acotada suave $y_r(t)$ con derivadas en el tiempo acotadas $y_r^{(1)}, \dots, y_r^{(\rho)}(t)$, el problema de seguimiento se dice que es globalmente resoluble por retroalimentación de estados estática para el sistema (5.5.1) si existe un control.

$$u = k(x) + \beta(x)\nu_r(y_r(t), \dots, y_r^{(\rho)}(t)) \tag{5.5.24}$$

tal que,

- i $\|x(t)\|$ es acotada, $\forall t \geq 0$,
- ii $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0$,
- iii $\beta(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$,
- iv k y β son funciones suaves en \mathbb{R}^n

donde ν es la función continua conocida como control auxiliar, tal que, dada cualquier condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ para el sistema en lazo cerrado,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)k(x) + g(x)\beta(x)\nu \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.5.25}$$

Teorema 5.5.1 (Seguimiento por Retroalimentación de Estados Estática). *[41] Considérese el sistema (5.5.1) y supóngase que: el grado relativo global está bien definido con $\rho \leq n$, la dinámica de seguimiento tiene estados acotados para entradas acotadas, y los campos vectoriales,*

$$\tilde{f} = f - \frac{L_f^\rho h}{L_g L_f^{\rho-1} h} g, \quad \tilde{g} = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h} g\tag{5.5.26}$$

son completos. Entonces el problema de seguimiento es globalmente resoluble por retroalimentación de estado estática.

La ley de control que permite realizar el seguimiento de la salida a una señal de referencia $y_r(t)$ mediante retroalimentación de estados estática para el sistema está dada por el control linealizante,

$$u = [S_q(\xi_1) M_r^{-1} B]^{-1} \left[-\dot{S}_q(\xi_1) S_q(\xi_1)^{-1} z_2 + S_q(\xi_1) M_r^{-1} C(\xi_1) + \nu \right],\tag{5.5.27}$$

y con la función de control auxiliar ν definida como,

$$\begin{aligned}\nu &= -K_1(y(t) - y_r(t)) - K_2(y^{(1)}(t) - y_r^{(1)}(t)) - \dots \\ &\dots - K_\rho(y^{(\rho-1)}(t) - y_r^{(\rho-1)}(t)) + y_r^{(\rho)}(t)\end{aligned}\tag{5.5.28}$$

donde los valores de las constantes K_i ($i = \{1, 2, \dots, \rho\}$) deben ser tales que la matriz resultante sea un *polinomio Hurwitz*.

$$\begin{aligned}\nu &= -K_1(y_r - y) - K_2(\dot{y}_r - \dot{y}) + \ddot{y}_r \\ &= -K_1 e - K_2 \dot{e} + \ddot{y}_r\end{aligned}\tag{5.5.29}$$

Estos resultados permiten que la dinámica del sistema (5.5.1) se estabilice en el origen, i.e., se lograr el seguimiento de la trayectoria de referencia $y_r(t)$ con la elección del control auxiliar ν .

El diagrama de bloques del control por retroalimentación de estados para el modelo del RMR por medio de difeomorfismos o *geometría diferencial* está ilustrado en la Figura 5.4.

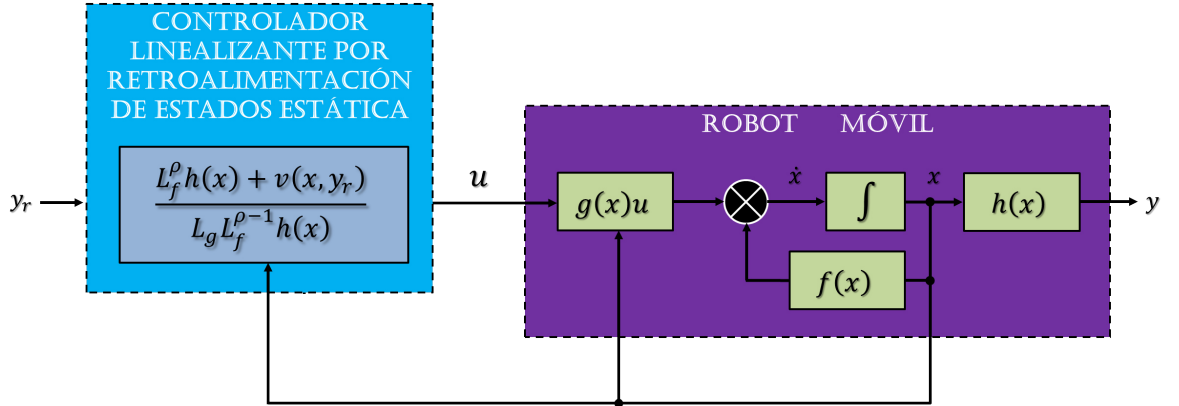


Figura 5.4: Diagrama de bloques del controlador linealizante por retroalimentación de estados usando geometría diferencial para el modelo dinámico del RMR.

La ecuación en lazo cerrado del modelo expresado en la *forma de seguimiento* resulta en un sistema linealizado con la misma estructura que la ecuación en lazo cerrado del *controlador de par calculado*. El análisis del punto de equilibrio determina al origen como el único equilibrio del sistema. Además, se garantiza la estabilidad del sistema del mismo modo que en el *controlador de par calculado*, donde se expone un método para la construcción de la matriz de ganancias de retroalimentación de tal modo que la ecuación matricial resultante sea un *polinomio Hurwitz*.

Para lograr el control de RMR de configuración diferencial se implementaron varias metodologías con el objetivo de lograr el seguimiento preciso de trayectorias de referencia. Además, en las distintas *leyes de control* se llevo a cabo el control de los conjuntos de variables de posición **local** y **cartesiana** del RMR. Las variables de control estan desacopladas y por medio del control dinámico sólo es posible controlar la posición local del RMR y las variables desacopladas del control se le conoce como variables de dinámica interna. Las variables de posición cartesiana se controlan por medio de difeomorfismos que transforman las ecuaciones del modelo dinámico del RMR y nos permite seleccionar acceder a estas variables para controlar la posición en el marco inercial o global (cartesiano) del RMR. Por tal motivo se revisaron las distintas metodologías, para implementar el control en los diferentes conjuntos de variables de posición. En conclusión, se investigó este diverso repertorio de estrategias de control para cubrir las distintas posibilidades y posteriormente llegar a encontrar en que variables se refleja el mejor aprovechamiento del seguimiento de trayectorias caóticas y brownianas deterministas que permiten aumentar la eficiencia en aplicaciones de exploración y vigilancia.

Capítulo 6

Resultados Experimentales

6.1 Introducción

En este capítulo se realiza la implementación por medio de una simulación computacional. Haciendo uso de la función *ODE* de MATLAB se generan trayectorias de referencia que el RMR debe seguir. Este seguimiento se hace por medio de estrategias de control de movimiento, las cuales fueron estudiadas en el capítulo anterior.

El seguimiento de las trayectorias se realiza a través de las variables de posición local (orientación θ y desplazamiento D) y en las variables de posición cartesiana $([x_g^T, y_g^T]^T)$.

Al ejecutar el control de seguimiento en las variables mencionadas previamente, se lleva a cabo la caracterización de la dinámica subyacente en la trayectoria generada por las variables que fueron controladas y las variables denominadas como de *dinámica interna*, con la finalidad de identificar el comportamiento dinámico del RMR que resulta de introducir trayectorias de referencia irregulares y que se mapean a través del modelo dinámico del RMR.

Al realizar esta metodología es posible indagar sobre las el tipo de mapeos que se generan a través del modelo dinámico del RMR en los diferentes conjuntos de variables de posición por medio de la herramienta de caracterización de series temporales.

Para determinar el patrón de referencia, estrategia de control y a través que variables de control que refleja una mayor eficiencia (optimización) en la exploración y vigilancia de áreas, se hará un análisis cuantitativo de la cobertura de un área de $1\text{m} \times 1\text{m}$ ponderando con valor de porcentaje para cada patrón de referencia, estrategia de control y sobre cuales variables de posición se aplicó la ley de control. Dado que también se plantea la optimización de tareas de vigilancia, se toma en cuenta el resultado del grado de impredecibilidad para determinar el mejor esquema de optimización de éstas aplicaciones.

6.2 Implementación de la Herramienta para la Caracterización de Trayectorias

En esta sección se realiza el análisis de las series temporales utilizadas como referencias, las cuales poseen distintos comportamientos dinámicos que pueden ser determinados por medio de los índices resultantes. Estos índices son característicos para cada comportamiento y pueden compararse con los que se encuentran disponibles en la literatura.

Los resultados que se obtentan también serán útiles para verificar que la *herramienta de caracterización de trayectorias* diseñada es puede realizar una caracterizaón acertada de la dinámica subyacente de cada trayectoria generada por los sistemas dinámicos. Se van a analizar series de tiempo caóticas, de movimiento Browniano (aproximación determinista), combinadas y periódicas.

Los resultados de esta sección se describirán en las tablas que ilustran los índices obtenidos al aplicar cada uno de los análisis que comprende la herramienta de caracterización de trayectorias para los diferentes casos que se describen en esta sección.

6.2.1 Casos de Análisis de Series Temporales de Referencia

| Caracterización de Series de Tiempo | | |
|--|---|---|
| Serie Temporal | Análisis | Resultados |
| Senoidal $x(t) = \sin(2\pi ft)$ $f = 10\text{Hz}$ | Análisis de Fourier | Frecuencia fundamental definida ($f = 10\text{Hz}$) |
| | | No hay ley de potencia en la energía del espectro. |
| | Función de Autocorrelación | Autocorrelaciones definidas |
| | Rango Reescalado de Hurst | $H \approx 0$ |
| | Análisis de Fluctuación Sin Tendencia (DFA) | $\alpha = 0.005795 \approx 0$ |
| | Información Mutua Promediada | $\tau = 1$ |
| | Método FNN | $D_e = 30$ |
| | Reconstrucción del Atractor | No tiene un atractor definido |
| | Máximo Exponente de Lyapunov | $\lambda \approx 0$ |
| | Dimensión de Correlación | $D_c = 0.02425 \approx 0$ |
| Comportamiento | | Periódico |

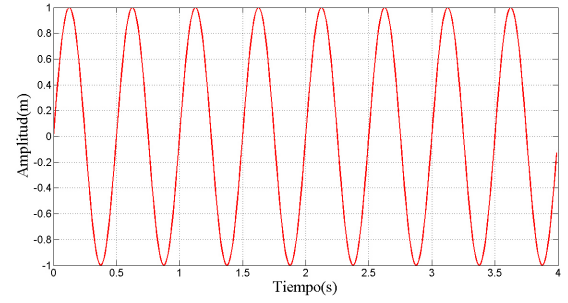


Figura 6.1: Serie de tiempo periódica senoidal.

Tabla 6.2.1: Caracterización de la serie temporal de la Figura 6.1.

| Caracterización de Series de Tiempo | | |
|--|---|---|
| Serie Temporal | Análisis | Resultados |
| Señal Aleatoria $x(t) = \text{randn}(t)$ | Análisis de Fourier | Frecuencia fundamental no definida. |
| | | No hay ley de potencia definida en la energía del espectro. |
| | Función de Autocorrelación | Autocorrelaciones no definidas. |
| | Rango Reescalado de Hurst | $H = 0.589 \approx 0.5$ |
| | Análisis de Fluctuación Sin Tendencia (DFA) | $\alpha = 0.44743$ |
| | Información Mutua Promediada | $\tau = 2$ |
| | Método FNN | $D_e \approx \infty$ |
| | Reconstrucción del Atractor | Atractor no definido. |
| | Máximo Exponente de Lyapunov | $\lambda = 8.6754$ |
| | Dimensión de Correlación | $D_c = 4.1924$ |
| Comportamiento | | Aleatorio |

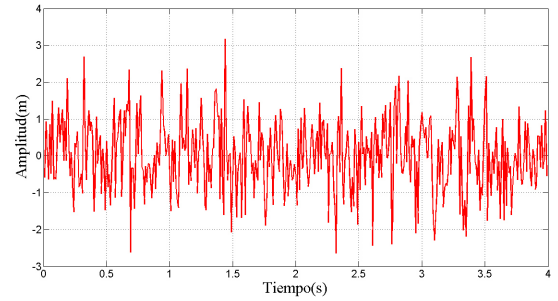


Figura 6.2: Serie de tiempo aleatoria.

Tabla 6.2.2: Caracterización de la serie temporal de la Figura 6.2.

| Caracterización de Series de Tiempo | | |
|---|--|--|
| Serie Temporal | Análisis | Resultados |
| Modelo Huerta-Cuéllar $\dot{x} = y$ $\dot{y} = -\gamma y + z$ $z = -\alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z + \alpha_4$ | Análisis de Fourier | Amplio espectro de frecuencias |
| | | Ley de potencia definida en la densidad espectral ($\beta = -2$) |
| | Función de Autocorrelación | Decaimiento exponencial en las autocorrelaciones |
| | Rango Reescalado de Hurst | $H = 0.990348$ |
| Parámetros del modelo $\gamma = 7 \times 10^{-5}$ $\alpha_1 = 1.5$ $\alpha_2 = 1.2$ $\alpha_3 = 0.1$ $C_1 = 0.9$ $C_2 = 0.6$ $\alpha_4 = C_1 \cdot \text{round}(x/C_2)$ | Análisis de Fluctuación Sin Tendencia (DFA) | $\alpha = 1.4429 \approx 1.5$ |
| | Información Mutua Promediada | $\tau = 13$ |
| | Método FNN | $D_e = 6$ |
| | Reconstrucción del Atractor | Atractor Definido |
| | Máximo Exponente de Lyapunov | $\lambda = 4.8039$ |
| | Dimensión de Correlación | $D_c = 3.4253$ |
| | | |
| Comportamiento | | Movimiento Browniano |

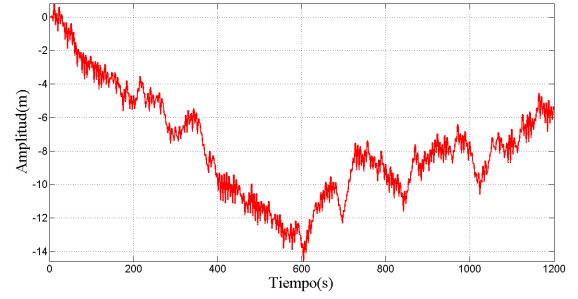


Figura 6.3: Desplazamiento de una partícula Browniana en una dimensión.

Tabla 6.2.3: Caracterización de la serie temporal de la Figura 6.3.

| Caracterización de Series de Tiempo | | |
|--|--|--|
| Serie Temporal | Análisis | Resultados |
| Modelo Dinámico Caótico de Lorenz $\dot{x} = \sigma(y - x)$ $\dot{y} = -xz + rx - y$ $\dot{z} = xy - bz$ | Análisis de Fourier | Amplio espectro de frecuencias |
| | | Ley de potencia no definida en la densidad espectral |
| | Función de Autocorrelación | Decaimiento exponencial en las autocorrelaciones |
| | Rango Reescalado de Hurst | $H = 0.84464$ |
| Parámetros del Modelo $\sigma = 10$ $r = 28$ $b = 8/3$ | Análisis de Fluctuación Sin Tendencia (DFA) | $\alpha = 1.3602$ |
| | Información Mutua Promediada | $\tau = 10$ |
| | Método FNN | $D_e = 3$ |
| | Reconstrucción del Atractor | Atractor definido |
| | Máximo Exponente de Lyapunov | $\lambda \approx 2.03$ |
| | Dimensión de Correlación | $D_c = 2.06$ |
| Comportamiento | | Caótico |

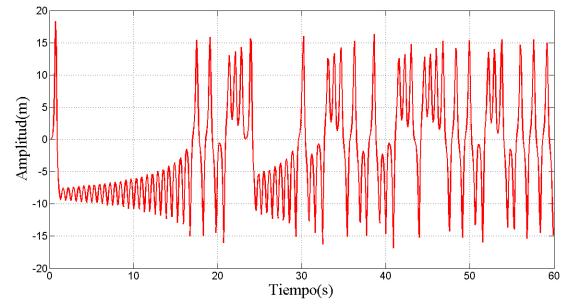


Figura 6.4: Serie temporal del sistema caótico de Lorenz.

Tabla 6.2.4: Caracterización de la serie temporal de la Figura 6.4.

Como se muestra en el apartado de resultados para cada tabla, se encontraron índices que son característicos para cada una de las diferentes series temporales, logrando identificar el comportamiento dinámico presente en cada una de ellas, por lo tanto, se espera que la herramienta de caracterización de trayectorias logre identificar estos comportamientos para las diferentes trayectorias que se extraen del RMR.

6.3 Escalamiento en Amplitud y Frecuencia de Sistemas Dinámicos

Uno de los problemas que se prevé en la aplicación del seguimiento de trayectorias con estas características es la capacidad limitada de velocidad que cuenta el RMR. Las trayectorias tienen fluctuaciones muy pronunciadas y muy rápidas, lo que también dificulta al control del RMR poder alcanzar y estabilizarse alrededor de la trayectoria. Por este motivo, se opta por introducir factores de escalamiento en amplitud y en frecuencia de tal modo que se puede ajustar las amplitudes y rapidez de las trayectorias generadas por los sistemas dinámicos a las capacidades del modelo del RMR.

Primero se definen los valores de escalamiento como:

- i η = Factor de escalamiento en amplitud.
- ii ρ = Factor de escalamiento en frecuencia.

Considerando el modelo dinámico de Lorenz con sus estados definidos como $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma(x_1 + x_2) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 + x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3.\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

El escalamiento η es un operador que modifica el tamaño de la amplitud de las trayectorias en cada uno de los estados del espacio de fase del sistema dinámico,

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \eta x_1 \\ \hat{x}_2 &= \eta x_2 \\ \hat{x}_3 &= \eta x_3.\end{aligned}\tag{6.3.2}$$

El escalamiento ϱ es un valor que permite modificar la variable temporal de la ecuación dinámica estirando o comprimiendo el tiempo, lo que resulta en un *tiempo relativo* para el sistema dinámico.

$$t = \varrho \hat{t} \tag{6.3.3}$$

$$\hat{t} = \frac{t}{\varrho}. \tag{6.3.4}$$

Utilizando los escalamientos tanto en amplitud como frecuencia en la primer ecuación del sistema caótico de Lorenz,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{\eta} \hat{x}_1}{\varrho d\hat{t}} &= \sigma \left(\frac{1}{\eta} \hat{x}_2 - \frac{1}{\eta} \hat{x}_1 \right) \\ \frac{\hat{x}_1}{dt} &= \varrho \sigma (\hat{x}_2 - \hat{x}_1), \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

realizando los escalamientos en todas las ecuaciones de los sistema dinámicos, se obtienen los siguientes modelos con escalamientos en frecuencia y amplitud ilustrados en la Tabla 6.3.5,

| Sistemas Dinámicos Generadores de Trayectorias con Escalamientos | | | | |
|--|--|--|---|---|
| Sistema Dinámico | Ecuación | Parámetros | Escalamiento en amplitud | Escalamiento en frecuencia |
| Lorenz | $\dot{\hat{x}}_1 = \varrho \cdot \sigma(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)$ $\dot{\hat{x}}_2 = \varrho(-\frac{1}{\eta}\hat{x}_1\hat{x}_3 + r\hat{x}_1 - \hat{x}_2)$ $\dot{\hat{x}}_3 = \varrho(\frac{1}{\eta}\hat{x}_1\hat{x}_2 - b\hat{x}_3)$ | $\sigma = 10.0$ $r = 28$ $b = 8/3$ | $\eta = 0.0196$ | $\varrho = 0.013$ |
| Rössler | $\dot{\hat{x}}_1 = \varrho(\hat{x}_2 + \hat{x}_3)$ $\dot{\hat{x}}_2 = \varrho(\hat{x}_1 + a\hat{x}_2)$ $\dot{\hat{x}}_3 = \varrho(\frac{1}{\eta}\hat{x}_1\hat{x}_3 - c\hat{x}_3) + \eta b$ | $a = 0.2$ $b = 0.2$ $c = 5.7$ | $\eta = 0.048$ | $\varrho = 0.09$ |
| Chen | $\dot{\hat{x}}_1 = \varrho \cdot a(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)$ $\dot{\hat{x}}_2 = \varrho[(c - a)\hat{x}_1 - \frac{1}{\eta}\hat{x}_1\hat{x}_3 + c\hat{x}_2]$ $\dot{\hat{x}}_3 = \varrho(\frac{1}{\eta}\hat{x}_1\hat{x}_2 - b\hat{x}_3)$ | $a = 40$ $b = 3$ $c = 28$ | $\eta = 0.0262$ | $\varrho = 0.01$ |
| Chua | $\dot{\hat{x}}_1 = \varrho \cdot \alpha(\hat{x}_2 - \hat{x}_1 - \eta h)$ $\dot{\hat{x}}_2 = \varrho(\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_3)$ $\dot{\hat{x}}_3 = -\varrho \cdot \beta \hat{x}_2$ $\dot{h} = m_1 \frac{1}{\eta} \hat{x}_1 + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(\frac{1}{\eta} \hat{x}_1 + 1 - \frac{1}{\eta} \hat{x}_1 - 1)$ | $\alpha = 15.6$ $\beta = 28$ $m_0 = -1.143$ $m_1 = -0.714$ | $\eta = 0.13$ | $\varrho = 0.028$ |
| Oscilador Duffing | $\dot{\hat{x}}_1 = \varrho \hat{x}_2$ $\dot{\hat{x}}_2 = \varrho[-\gamma \hat{x}_2 - \alpha \hat{x}_1 - \beta \cdot \frac{1}{\eta^2} \hat{x}_1^3 + \eta \cdot F \cos(\frac{1}{\eta} \hat{x}_3)]$ $\dot{\hat{x}}_3 = \varrho \cdot \eta \cdot \omega$ | $\alpha = -1$ $\gamma = 1$ $\beta = 1$ $F = 0.3$ $\omega = 1$ | $\eta = 0.33$ | $\varrho = 0.1$ |
| Modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano | $\dot{\hat{x}}_1 = \varrho \hat{x}_2$ $\dot{\hat{x}}_2 = \varrho(-\gamma \hat{x}_2 + \hat{x}_3)$ $\dot{\hat{x}}_3 = \varrho[-\alpha_1 \hat{x}_1 - \alpha_2 \hat{x}_2 - \alpha_3 \hat{x}_3 + \eta \cdot \alpha_4]$ $\hat{\alpha}_4 = C_1 \cdot \text{round}(\frac{\frac{1}{2}\hat{x}_1}{C_2})$ | $\gamma = 7 \times 10^{-5}$ $\alpha_1 = 1.5$ $\alpha_2 = 1.2$ $\alpha_3 = 0.1$ $C_1 = 0.9$ $C_2 = 0.6$ | $\eta = 0.25$ | $\varrho = 0.1$ |
| Modelo Huerta-Cuéllar con régimen caótico | $\dot{\hat{x}}_1 = \varrho \hat{x}_2$ $\dot{\hat{x}}_2 = \varrho(-\gamma \hat{x}_2 + \hat{x}_3)$ $\dot{\hat{x}}_3 = \varrho[-\alpha_1 \hat{x}_1 - \alpha_2 \hat{x}_2 - \alpha_3 \hat{x}_3 + \eta \cdot \alpha_4]$ $\hat{\alpha}_4 = C_1 \cdot \text{round}(\frac{\frac{1}{2}\hat{x}_1}{C_2})$ | $\gamma = 7 \times 10^{-5}$ $\alpha_1 = 1.6$ $\alpha_2 = 1.3$ $\alpha_3 = 0.94$ $C_1 = 0.9$ $C_2 = 0.6$ | $\eta = 1.2$ | $\varrho = 0.07$ |
| Sistema con dinámica cambinada | Sistema Caótico de Chen Modelo Huerta-Cuéllar con Movimiento Browniano | Parámetros Chen y Modelo Huerta-Cuéllar | $\eta_{MH-C} = 0.27, \quad \eta_{chen} = 0.025$ | $\varrho_{MH-C} = 0.08, \quad \varrho_{chen} = 0.008$ |
| Periódico | $\dot{\hat{x}}_1 = \cos(\varrho t)$ $\dot{\hat{x}}_2 = \sin(\varrho t)$ | N/A | $\eta = 0.45$ | $\varrho = 0.1$ |

Tabla 6.3.5: Sistemas dinámicos con escalamientos en frecuencia y amplitud utilizados como generadores de trayectorias.

6.4 Implementación de Esquemas de Control

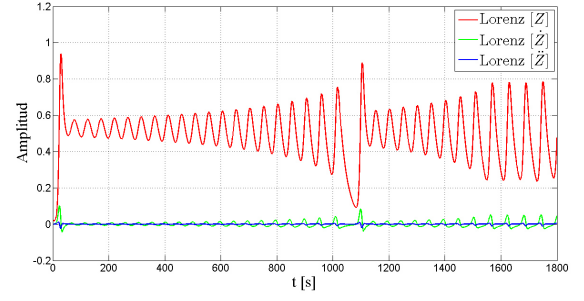
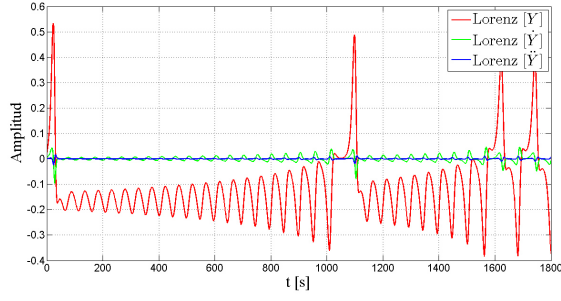
Los resultados se ilustran en las gáficas el resultado del seguimiento de las trayectorias generadas por medio de los sistemas dinámicos, además, se ilustran las tablas de análisis con los índices resultantes al aplicar la herramienta de caracterización de trayectorias para cada uno de los diferentes casos planteados en este trabajo, que corresponden al seguimiento de trayectorias de bajo dos esquemas principales:

- Control de seguimiento en variables locales del RMR.
- Control de seguimiento en variables cartesianas del RMR.

Las referencias que se introducen a los controladores corresponden a las trayectorias generadas por los siguientes sistemas dinámicos:

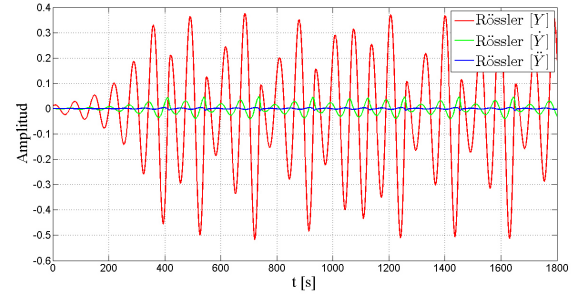
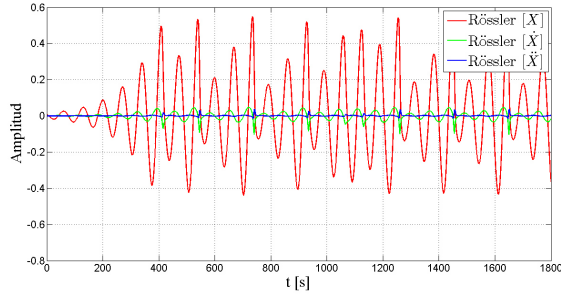
- **Sistema caótico de Lorenz.**
- **Sistema caótico de Rössler.**
- **Sistema caótico de Chen.**
- **Sistema caótico de Chua.**
- **Sistema caótico del oscilador de Duffing.**
- **Modelo Huerta-Cuéllar con régimen caótico.**
- **Modelo Huerta-Cuéllar con régimen de movimiento Browniano.**
- **Sistema dinámico con trayectorias periódicas.**
- **Comportamientos dinámicos combinados.**

Los parámetros de las ecuaciones de los sistemas dinámicos también son especificados en cada una de las tablas que contienen los resultados de la caracterización de la dinámicas de cada sistema. Como se menciona al principio del capítulo, se utiliza la función *ODE* para la solución de las ecuaciones diferenciales de los sistemas dinámicos con sus respectivos controladores, para los casos de control de posición en variables locales y cartesianas, se utiliza un intervalo de tiempo $\Delta t = 0.1$. Para ambos esquemas de control se utilizaron las trayectorias de referencia siguientes.



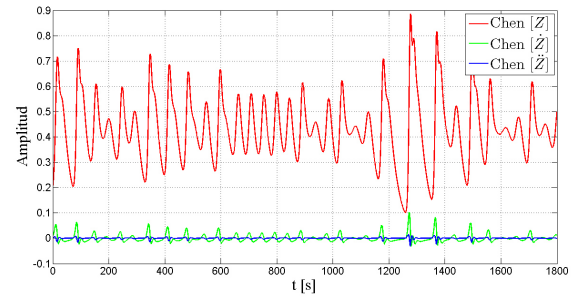
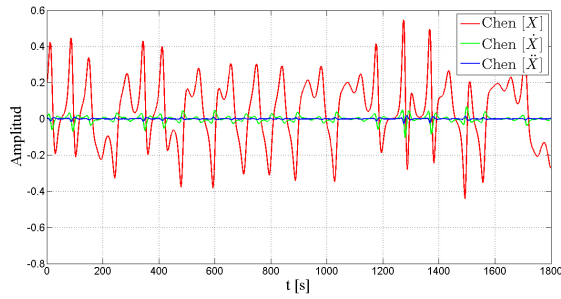
(a) Referencia para las coordenadas de posición (D, x_g). (b) Referencia para las coordenadas de posición (θ, y_g).

Figura 6.5: Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico de Lorenz.



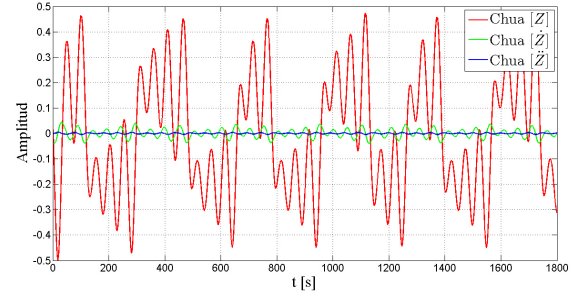
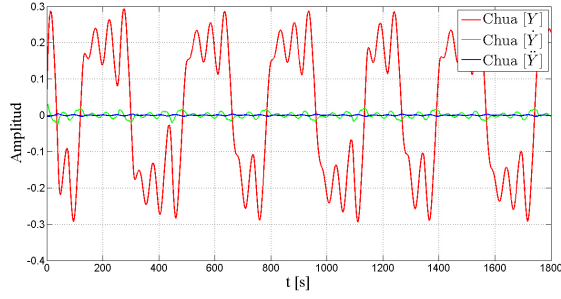
(a) Referencia para las coordenadas de posición (D, x_g). (b) Referencia para las coordenadas de posición (θ, y_g).

Figura 6.6: Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico de Rössler.



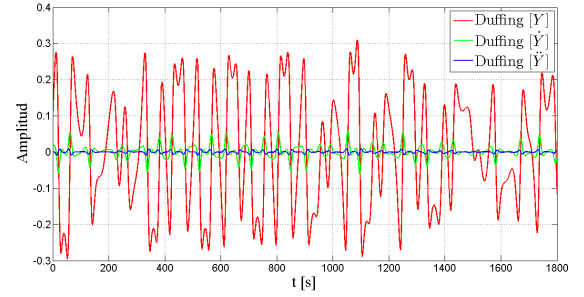
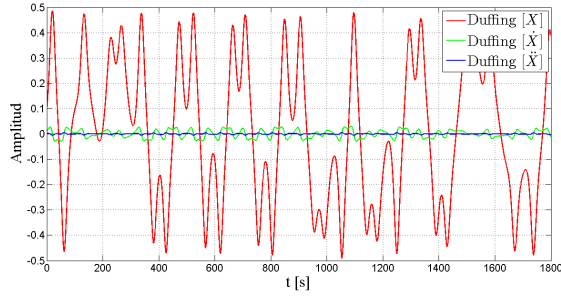
(a) Referencia para las coordenadas de posición (D, x_g). (b) Referencia para las coordenadas de posición (θ, y_g).

Figura 6.7: Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico de Chen.



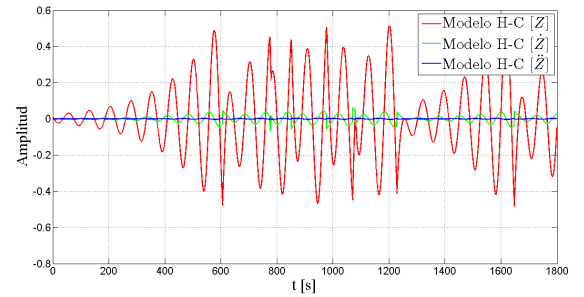
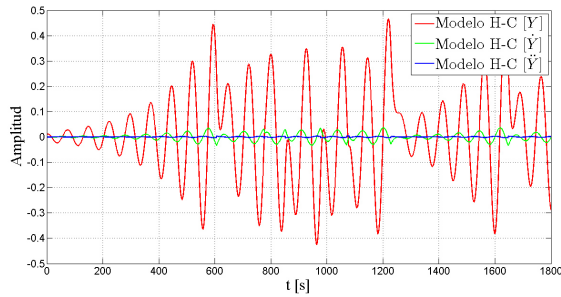
(a) Referencia para las coordenadas de posición (D, x_g) . (b) Referencia para las coordenadas de posición (θ, y_g) .

Figura 6.8: Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico de Chua.



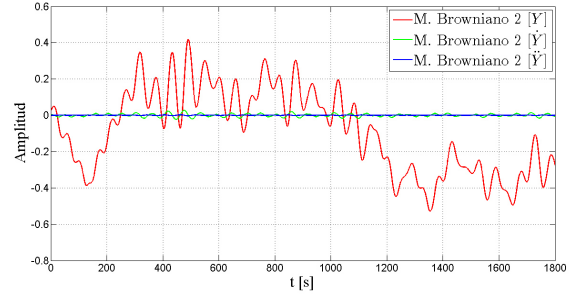
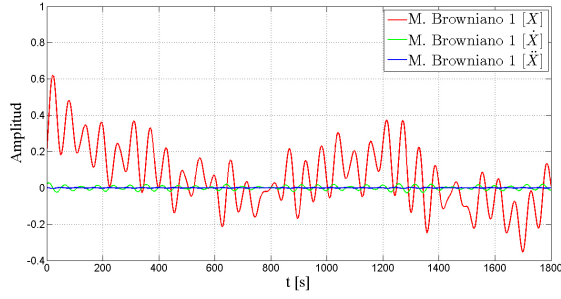
(a) Referencia para las coordenadas de posición (D, x_g) . (b) Referencia para las coordenadas de posición (θ, y_g) .

Figura 6.9: Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema caótico del oscilador Duffing.



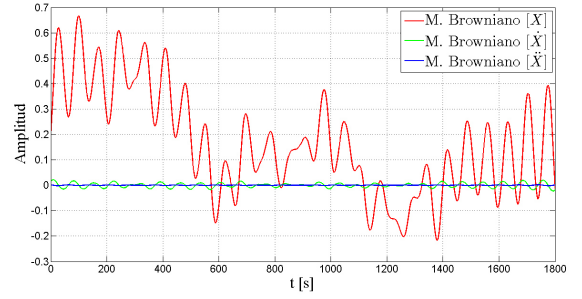
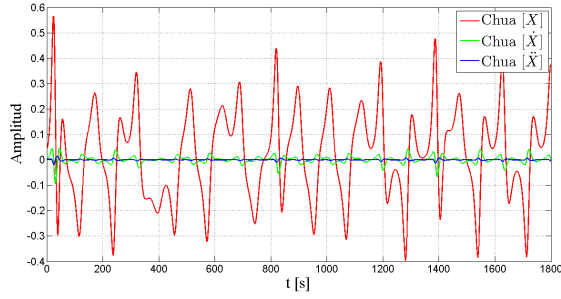
(a) Referencia para las coordenadas de posición (D, x_g) . (b) Referencia para las coordenadas de posición (θ, y_g) .

Figura 6.10: Referencias para el control de seguimiento generadas por el Modelo Huerta-Cuellar con régimen caótico.



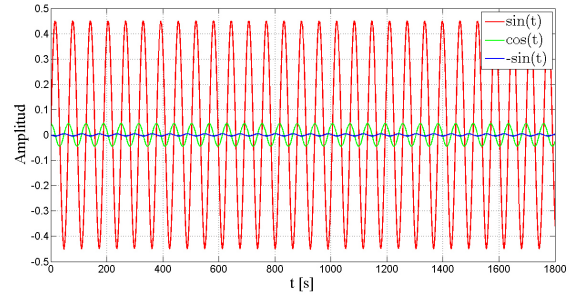
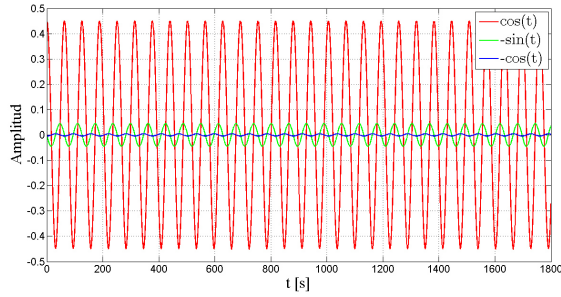
(a) Referencia para las coordenadas de posición (D, x_g). (b) Referencia para las coordenadas de posición (θ, y_g).

Figura 6.11: Referencias para el control de seguimiento generadas por el Modelo Huerta-Cuellar con movimiento Browniano.



(a) Referencia para las coordenadas de posición (D, x_g). (b) Referencia para las coordenadas de posición (θ, y_g).

Figura 6.12: Referencias para el control de seguimiento generadas por el sistema con dinámica combinada (movimiento Browniano y caos de Chen).



(a) Referencia para las coordenadas de posición (D, x_g). (b) Referencia para las coordenadas de posición (θ, y_g).

Figura 6.13: Referencias para el control de seguimiento generadas por un sistema dinámico periódico.

6.5 Implementación de Estrategia de Control de Seguimiento en Variables de Desplazamiento y Orientación

En esta sección se lleva a cabo el control en las variables de desplazamiento y orientación del RMR ($[D^T, \theta^T]^T$). Aquellas variables que no forman parte del control, i.e., las *variables de dinámica libre*, que representan las variables cartesianas ($[x_g^T, y_g^T]^T$) del RMR.

En la parte de los resultados de cada una de las tablas se indica a que comportamiento dinámico se aproxima cada una de las variables del RMR.

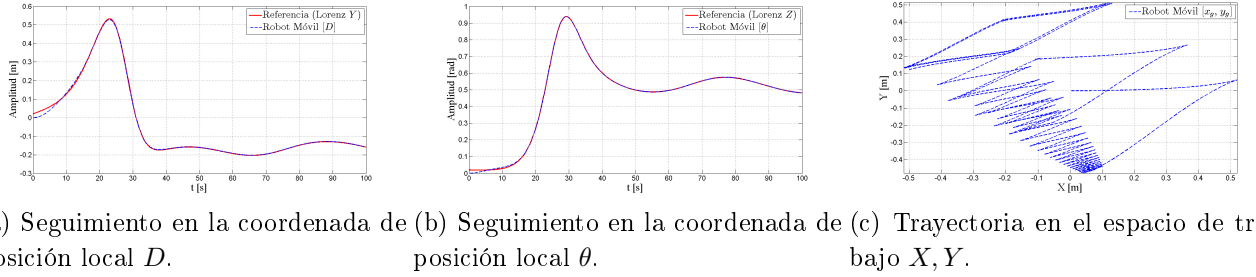
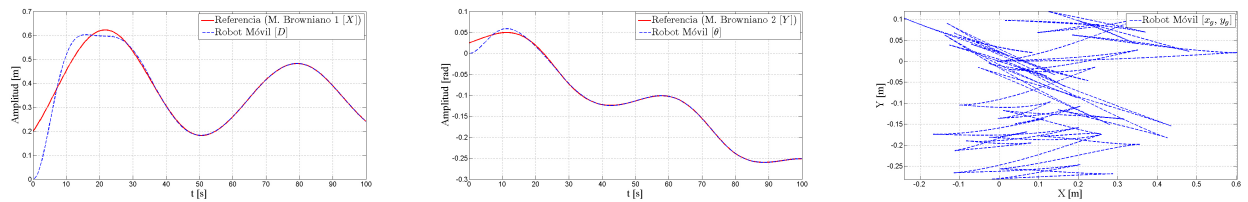


Figura 6.14: Control de seguimiento en coordenadas de posición local del RMR con la ley de control de *par calculado* con referencias del sistema caótico de Lorenz.

| Análisis de las Trayectorias del Robot Móvil | | | | |
|--|---|---|---|---|
| Análisis de Series Temporales | Trayectorias | | | |
| | x_g | y_g | D | θ |
| Análisis de Fourier | Amplio espectro de frecuencias | Amplio espectro de frecuencias | Amplio espectro de frecuencias | Amplio espectro de frecuencias |
| | Ley de potencia en densidad no espectral definida | Ley de potencia en densidad no espectral definida | Ley de potencia en densidad no espectral definida | Ley de potencia en densidad no espectral definida |
| Función de Autocorrelación | Decaimiento exponencial en las correlaciones | Correlaciones no completamente definidas | Decaimiento en las correlaciones | Decaimiento exponencial en las correlaciones |
| Rango Reescalado de Hurst | $H = 0.78514$ | $H = 0.52002$ | $H = 0.87876$ | $H = 0.87477$ |
| Análisi de Fluctuación sin Tendencia (DFA) | $\alpha = 0.83818$ | $\alpha = 0.46013$ | $\alpha = 1.3097$ | $\alpha = 1.1515$ |
| Información Mutua Promediada | $\tau = 8$ | $\tau = 8$ | $\tau = 29$ | $\tau = 26$ |
| Método FNN | $D_e = 4$ | D_e no definida | $D_e = 5$ | $D_e = 9$ |
| Reconstrucción del Atractor | Atractor definido | Atractor no definido | Atractor definido | Atractor definido |
| Máximo Exponente de Lyapunov | $\lambda = 0.087091$ | $\lambda = 0.061231$ | $\lambda = 0.10897$ | $\lambda = 0.10292$ |
| Dimensión de Correlación | $D_c = 2.05$ | D_c no definida | $D_c = 2.954$ | $D_c = 2.9903$ |
| Comportamiento | Caótico | Indefinido | Caótico | Caótico |

Tabla 6.5.6: Caracterización de las trayectorias del control de seguimiento en coordenadas de posición local con referencias del sistema caótico de Lorenz.



(a) Seguimiento en la coordenada de posición local D . (b) Seguimiento en la coordenada de posición local θ . (c) Trayectoria en el espacio de trabajo X, Y .

Figura 6.15: Control de seguimiento en coordenadas de posición local del RMR con la ley de control de *par calculado* con referencias del Modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano.

| Análisis de las Trayectorias del Robot Móvil | | | | |
|--|---|---|---|--|
| Análisis de Series Temporales | Trayectorias | | | |
| | D | θ | x_p | y_p |
| Análisis de Fourier | Presencia en bajas frecuencias | Presencia en bajas frecuencias | Presencia en bajas frecuencias | Presencia en bajas frecuencias |
| | Ley de potencia en densidad espectral definida ($\beta = -2$) | Ley de potencia en densidad espectral definida ($\beta = -2$) | Ley de potencia en densidad espectral definida ($\beta = -2$) | Ley de potencia en densidad espectral definida ($\beta = -1.86$) |
| Función de Autocorrelación | Decaimiento en las correlaciones | Decaimiento en las correlaciones | Decaimiento en las correlaciones | Decaimiento en las correlaciones |
| Rango Reescalado de Hurst | $H = 1.0$ | $H = 1.0$ | $H = 1.0$ | $H = 1.0$ |
| Análisis de Fluctuación sin Tendencia (DFA) | $\alpha = 1.5303 \approx 1.5$ | $\alpha = 1.4666 \approx 1.5$ | $\alpha = 1.5685 \approx 1.5$ | $\alpha = 1.5274 \approx 1.5$ |
| Información Mutua Promediada | $\tau = 20$ | $\tau = 20$ | $\tau = 19$ | $\tau = 22$ |
| Método FNN | $D_e = 6$ | $D_e = 5$ | $D_e = 5$ | $D_e = 5$ |
| Reconstrucción del Atractor | Atractor definido | Atractor definido | Atractor definido | Atractor definido |
| Máximo Exponente de Lyapunov | $\lambda = 0.050294$ | $\lambda = 0.032133$ | $\lambda = 0.021849$ | $\lambda = 0.0015902$ |
| Dimensión de Correlación | $D_c = 3.328$ | $D_c = 3.0292$ | $D_c = 3.0673$ | $D_c = 3.1189$ |
| Comportamiento | Mov. Browniano | Mov. Browniano | Mov. Browniano | Mov. Browniano |

Tabla 6.5.7: Caracterización de las trayectorias del control de seguimiento en coordenadas de posición local con referencias del modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano.

6.6 Implementación de Estrategia de Control de Seguimiento en Variables Cartesianas

A continuación, se realiza el control en las variables posición cartesiana del RMR $([x_g^T, y_g^T]^T)$.

Las *variables de dinámica libre* son las variables de posición local $([D^T, \theta^T]^T)$ del RMR.

Cabe destacar que implementar esta esquema de control en variables de posición cartesiana, se toma la trayectoria generada por un sistema dinámico y se utiliza como referencia para el control de seguimiento, de este modo, se logra el seguimiento y estabilización alrededor de una trayectoria que resulta de una proyección (dos estados del sistema dinámico) del atractor del sistema dinámico generador de trayectorias, en el espacio de trabajo del RMR. Generalmente, este atractor se define como un objeto tridimensional generado por el espacio de fase del sistema, sin embargo, el atractor posee una dimensión fraccionaria, no entera.

También se implementa el seguimiento de trayectorias que describen movimiento Browniano para el plano de trabajo del RMR (proyección realizada a partir de dos Modelos Huerta-Cuéllar con régimen de movimiento Browniano) y comportamientos dinámicos combinados (comportamiento caótico con movimiento Browniano).

Una vez que se realiza el control del RMR sobre la trayectoria, se hace uso de la herramienta para la caracterización de trayectorias aplicada a las variables del RMR, se ilustran las gráficas resultantes del control y los índices de los análisis que comprende la herramienta de caracterización en una tabla.

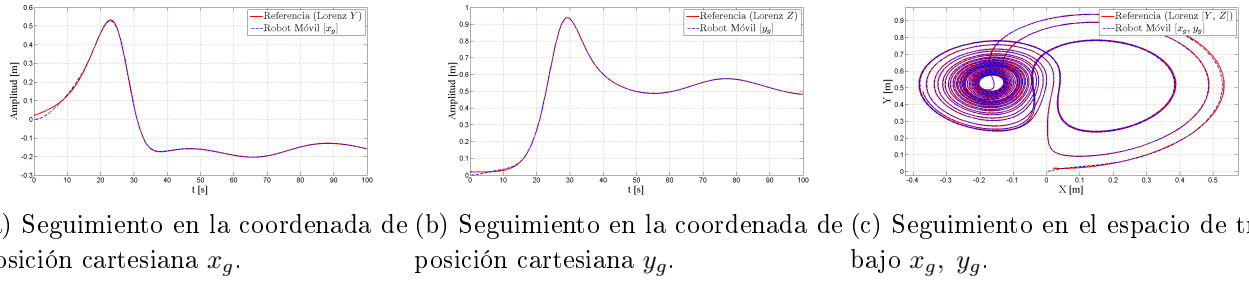
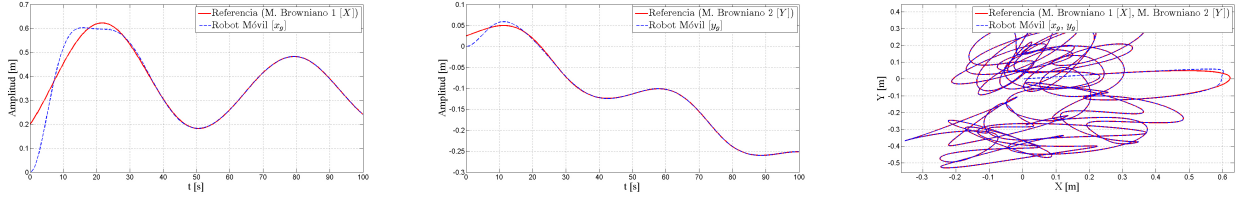


Figura 6.16: Control de seguimiento en coordenadas de posición cartesiana del RMR con la ley de control *linealizante por geometría diferencial* con referencias del sistema caótico de Lorenz.

| Análisis de las Trayectorias del Robot Móvil | | | | |
|--|---|---|---|---|
| Análisis de Series Temporales | Trayectorias | | | |
| | D | θ | x_g | y_g |
| Análisis de Fourier | No hay frecuencias definidas | No hay frecuencias definidas | Amplio espectro de frecuencias | Amplio espectro de frecuencias |
| | No hay ley de potencia en densidad espectral definida | No hay ley de potencia en densidad espectral definida | No hay ley de potencia en densidad espectral definida | No hay ley de potencia en densidad espectral definida |
| Función de Autocorrelación | Decaimiento en las correlaciones | Decaimiento en las correlaciones | Decaimiento exponencial en las correlaciones | Decaimiento exponencial en las correlaciones |
| Rango Reescalado de Hurst | $H = 1.0$ | $H = 1.0$ | $H = 0.36651$ | $H = 0.20975$ |
| Análisis de Fluctuación sin Tendencia (DFA) | $\alpha = 1.7564$ | $\alpha = 1.647$ | $\alpha = 0.33881$ | $\alpha = 0.18091$ |
| Información Mutua Promediada | $\tau = 100$ | $\tau = 1$ | $\tau = 8$ | $\tau = 8$ |
| Método FNN | $D_e = 2$ | $D_e = 4$ | $D_e = 4$ | $D_e = 4$ |
| Reconstrucción del Atractor | Atractor no definido | Atractor no definido | Atractor definido | Atractor definido |
| Máximo Exponente de Lyapunov | $\lambda = 0.24612$ | $\lambda = 0.0243$ | $\lambda = 0.09384$ | $\lambda = 0.96903$ |
| Dimensión de Correlación | $D_c = 2.289$ | $D_c = 1.6863$ | $D_c = 1.9787$ | $D_c = 1.9939$ |
| Comportamiento | Indefinido | Indefinido | Caótico | Caótico |

Tabla 6.6.8: Caracterización de las trayectorias del control de seguimiento en coordenadas de posición cartesiana con referencias del sistema caótico de Lorenz.



(a) Seguimiento en la coordenada de posición cartesiana x_g . (b) Seguimiento en la coordenada de posición cartesiana y_g . (c) Seguimiento en el espacio de trabajo bajo x_g, y_g .

Figura 6.17: Control de seguimiento en coordenadas de posición cartesiana del RMR con la ley de control *linealizante por geometría diferencial* con referencias del modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano.

| Análisis de las Trayectorias del Robot Móvil | | | | |
|--|---|---|--|--|
| Análisis de Series Temporales | Trayectorias | | | |
| | D | θ | x_g | y_g |
| Análisis de Fourier | No hay frecuencias definidas | Presencia en bajas frecuencias | Presencia en bajas frecuencias | Presencia en bajas frecuencias |
| | No hay ley de potencia en densidad espectral definida | Ley de potencia en densidad espectral ($\beta = -1.8116$) | Ley de potencia en densidad espectral ($\beta = -2$) | Ley de potencia en densidad espectral ($\beta = -2$) |
| Función de Autocorrelación | Decaimiento de las correlaciones | Decaimiento de las correlaciones | Decaimiento de las correlaciones | Decaimiento de las correlaciones |
| Rango Reescalado de Hurst | $H = 1$ | $H = 0.9786$ | $H = 1$ | $H = 1$ |
| Análisis de Fluctuación sin Tendencia (DFA) | $\alpha = 1.7341$ | $\alpha = 1.558 \approx 1.5$ | $\alpha = 1.5375 \approx 1.5$ | $\alpha = 1.4946 \approx 1.5$ |
| Información Mutua Promediada | $\tau = 13$ | $\tau = 78$ | $\tau = 20$ | $\tau = 20$ |
| Método FNN | $D_e = 2$ | $D_e = 5$ | $D_e = 6$ | $D_e = 5$ |
| Reconstrucción del Atractor | Atractor no definido | Atractor definido | Atractor definido | Atractor definido |
| Máximo Exponente de Lyapunov | $\lambda = 0.013269$ | $\lambda = 0.031566$ | $\lambda = 0.03008$ | $\lambda = 0.032133$ |
| Dimensión de Correlación | $D_c = 1.5385$ | $D_c = 2.7219$ | $D_c = 3.328$ | $D_c = 3.0292$ |
| Comportamiento | Indefinido | Mov. Browniano | Mov. Browniano | Mov. Browniano |

Tabla 6.6.9: Caracterización de las trayectorias del control de seguimiento en coordenadas de posición cartesiana con referencias del modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano.

6.7 Cuantificación del Área Recorrida

En esta sección se realiza un análisis para cuantitativar el total del área recorrida por el RMR a partir de las trayectorias en el espacio de trabajo (marco inercial X, Y). La ponderación de cada uno de los casos se asigna por medio de un porcentaje del área explorada para cada uno

de los diferentes casos que se plantearon en esta tesis.

Se obtuvieron resultados donde se ilustra cuantitativamente cuál de las estrategias propuestas para realizar coberturas de áreas resulta ser más eficiente. En los primeros resultados se ilustran los porcentajes obtenidos para cada uno de los sistemas generadores de trayectorias con aplicación de control de seguimiento en las variables de posición local del RMR. La segunda parte de éstos resultados comprende los distintos sistemas generadores de trayectorias y con aplicación de la ley de control de seguimiento sobre las variables de posición cartesiana del RMR.

6.7.1 Resultados de la Exploración con Control de Variables de Orientación y Desplazamiento

| Esquema de Control en Variables Locales | |
|--|------------------------------|
| Generador de trayectorias | Porcentaje de área explorada |
| Sistema caótico de Chen | 53.01% |
| Sistema caótico de Lorenz | 41.24% |
| Sistema caótico de Chua | 41.21% |
| Sistema caótico del oscilador Duffing | 30.17% |
| Sistema caótico de Rossler | 26.26% |
| Modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano | 25.05% |
| Modelo Huerta-Cuéllar con régimen caótico | 20.63% |
| Modelo dinámico con comportamiento combinado | 20.02% |
| Sistema dinámico periódico | 19.21% |

Tabla 6.7.10: Resultados de la cobertura del área de trabajo de $1m \times 1m$ para el seguimiento en coordenadas de posición local.

6.7.2 Resultados de la Exploración con Control de Variables Cartesianas

| Esquema de Control en Variables Cartesianas | |
|--|------------------------------|
| Generador de trayectorias | Porcentaje de área explorada |
| Modelo Huerta-Cuéllar con régimen caótico | 74.73% |
| Sistema caótico de Rössler | 73.66% |
| Sistema caótico de Chen | 61.54% |
| Modelo dinámico con comportamiento combinado | 57.34% |
| Sistema caótico del oscilador Duffing | 55.95% |
| Modelo Huerta-Cuéllar con movimiento Browniano | 53.02% |
| Sistema caótico de Lorenz | 47.73% |
| Sistema dinámico periódico | 24.45% |
| Sistema caótico de Chua | 22.14% |

Tabla 6.7.11: Resultados de la cobertura del área de trabajo de $1m \times 1m$ para el seguimiento en coordenadas de posición cartesiana.

En las Tablas 6.7.10 y 6.7.11, se ilustra la cuantificación de la cobertura para cada esquema de control con diferentes patrones de referencia y se listan del que mejores resultados da hasta el más ineficiente, que corresponden a los que se encuentran en la parte inferior de las tablas. Los resultados obtenidos en el control de seguimiento en variables de posición resultan ser muy poco eficientes, sin embargo, influye el hecho de que se tuvo que recortar del área total recorrida, un

cuadro de $1m \times 1m$ a modo de comparación para la tabla de coberturas, por lo tanto, tienen una mayor distribución en el área de trabajo, no es posible controlar su desplazamiento en un área delimitada y serían una buena alternativa cuando se desee realizar una cobertura de una extensión de espacio muy amplia. La cobertura de áreas por el esquema de control de variables de posición cartesiana resulta ser mucho más eficiente y con oportunidad de mejorarse aún más, aumentando el tiempo de exploración, ya que en este trabajo se utilizó un tiempo de simulación de 30 minutos. Se puede notar que para este caso se generan trayectorias densas que pueden delimitarse a la cobertura de un área de tamaño específico. Para cuestiones de optimización de aplicaciones de seguridad, los patrones más idóneos son los de movimiento Browniano y comportamientos combinados, ya que pueden delimitarse, tienen una cobertura de exploración aceptable y sus trayectorias en el espacio de trabajo son altamente impredecibles, a diferencia de las proyecciones de los atractores caóticos, los cuales siempre tienen una forma definida y que difícilmente varían significativamente.

6.7.3 Conclusiones

En el presente trabajo se propuso realizar un análisis exhaustivo de metodologías útiles para la exploración y vigilancia de áreas de trabajo. En la literatura se han propuesto diversas soluciones para estos problemas, sin embargo, los resultados que se muestran carecen de información cuantitativa sobre los métodos que permiten realizar exploraciones eficientes, por esta razón, este trabajo proporciona resultados más completos que los que se encuentran en la literatura relacionada en esta área de interés.

Por medio de las estrategias de control proporcional derivativo con variantes (PD+), linealización exacta por retroalimentación de estados ó par calculado y de geometría diferencial, se logró hacer un control preciso para el seguimiento de trayectorias que son altamente complejas, es decir, poseen un comportamiento muy irregular. Fue posible realizar esta tarea de una manera más simple por medio del uso de sistemas dinámicos modelados con ecuaciones diferenciales

puramente deterministas, los cuales generaron las trayectorias de referencia. Cabe destacar que este trabajo es el primero en utilizar un modelo que genera movimiento Browniano determinista por medio de la aproximación presentada en [11], lo cuál simplifica y brinda mejores resultados que los esquemas que se abordan en la literatura relacionada al movimiento Browniano en la robótica móvil, ya que en su mayoría están ligados a una variable aleatoria, lo cuál dificulta su implementación por la carencia de diferencibilidad. Esto supone una mejora en cuestión de precisión y conocimiento preciso de las trayectorias que serán generadas por este modelo dinámico.

Para facilitar el control de seguimiento de estas trayectorias con comportamientos muy irregulares, se añadió un factor adicional que modifica las ecuaciones dinámicas de los diferentes modelos utilizados, donde se ajusta por medio de la definición de factores de escalamiento para las variables del sistema de referencia que modifican la amplitud (tamaño del área) y frecuencia (rapidez) de las trayectorias. Esto brindó una mayor adaptabilidad a las trayectorias seguidas por medio del RMR y se lograron mejores resultados.

Otro aspecto importante a resaltar de los resultados obtenidos a partir de este trabajo fue la posibilidad de determinar sobre que conjunto de variables se llega a obtener mejores resultados para la cobertura de áreas. Además, fue posible identificar que al aplicar el control en las variables de posición cartesiana, se lograron mejores resultados para las exploraciones de trabajo más eficientes.

Debido a la controlabilidad limitada, que es intrínseca del modelo del RMR, existen variables de dinámica interna, es decir, variables que no son posibles de controlar. Al presentarse este fenómeno, se incluyó cómo otro motivo de estudio analizar el comportamiento dinámico resultante de la aplicación de estrategias de control en los diferentes conjuntos de variables, las de posición cartesiana y las de posición local (orientación y desplazamiento) del RMR. Se lograron obtener resultados interesantes donde se demuestra por medio de los índices resultantes de los análisis incluidos en la herramienta de caracterización de trayectorias, de tal modo que, al introducir

referencias con comportamientos dinámicos irregulares a través del modelo del RMR, se mapeo a la salida de sus variables de dinámica libre comportamientos que no son aleatorios. Esto nos brindó información que establece que existe algún tipo de relacione entrelas variables del modelo, ya que ciertos comportamientos entrada modifican su dinámica a la salida generando otro tipo de comportamiento distinto o incluso, manteniendo el mismo tipo de comportamiento, a pesar de que se trata de un modelo no lineal. Adicionalmente, usando la herramienta de caracterización de trayectorias, con las consideraciones pertinentes, es posible obtener una caracterización de diferentes comportamientos en series temporales de cualquier otro fenómeno.

Otro resultado obtenido en este trabajo fue el uso de comportamientos dinámicos combinados por medio de un patron caótico combinados con movimiento Browniano, para imprimir características de transitividad topológica relacionada al comportamiento caótico con el movimiento perpetuo y los incrementos independientes aleatorios característicos del movimiento Browniano, por medio de modelos dinámicos con ecuaciones deterministas que facilitan manejar su amplitud y rapidez, tal y como se menciona anteriormente, por medio de ajustes de escalamiento en frecuencia y amplitud, facilitando su implementación. Haciendo una comparación con los demás patrones de referencia se determinó que los esquemas combinados proporcionan mejores resultados en cuánto a cobertura e impredecibilidad para las tareas de exploración y vigilancia.

Finalmente, se hizo la implementación física en la plataforma robótica *e-puck*, donde se llevaron a cabo los mismos análisis de las simulaciones computacionales. Se seleccionó el mejor caso de la simulación y se llevó a la implementación. De este modo se comprobó que los resultados obtenidos de la implementación es aproximadamente el mismo que resultado de las simulaciones.

Se concluye que fue posible mejorar la impredecibilidad y cobertura por medio de RMR que siguen trayectorias de referencia Brownianas y caóticas al menos dos veces diferenciables, dando paso a sistemas robóticos autónomos con mayor eficiencia en aplicaciones de exploración y vigilancia.

Bibliografía

- [1] E. Akin, *The general topology of dynamical systems, 2009*, vol. 1, American Mathematical Society, Charles Street, Providence, Rhode Island, USA, 2000.
- [2] L. Bachelier, *The theory of speculation*, Phd, University of Paris, Paris, France, 1900.
- [3] R. Balakrishna and A. Ghosal, *Modeling of slip for wheeled mobile robots.*, IEEE **11** (1995), no. 1, 126–132.
- [4] A. Bara and S. Dale, *Dynamic modeling and stabilization of wheeled mobile robot.*, Proceedings of the 5th WSEAS, Int. Conf. on Dynamical Systems and Control, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), January 2009, pp. 87–92.
- [5] R. Bishop, *The stanford encyclopedia of philosophy: Chaos*, Metaphysics Research Lab, Stanford University (2017).
- [6] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinsel, and G. M. Ljung, *Time series analysis: Forecasting and control*, Prentice Hall, 1994.
- [7] R. Brown, *A brief account of microscopic observations made in the months of june, july and august 1827 on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.*, Edinburgh New Philos J. (1827).
- [8] G. Campion, G. Bastin, and D’Andrea-Novet, *Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots.*, IEEE Trans. on, vol. 12, Robotics and Automation, IEEE, February 1996, pp. 47–61.
- [9] Z. Cao, Y. Zhao, and Y. Fu, *Point stabilization of mobile robots by genetic sliding mode approach with neural dynamics model on uneven surface.*, 8th IEEE (Seoul, Korea), International Conference on Automation Science and Engineering, IEEE, August 2012, pp. 1150–1155.
- [10] C. Chanvech, K. Klomkarn, and P. Sooraksa, *Combined chaotic attractor mobile robots.*, SICE-ICASE International Joint Conference 2006, ICASE, October 2006, pp. 3079–3082.
- [11] G. H. Cuellar, E. J. López, E. C. Cantón, and A. N. Pisarchik, *An approach to generate deterministic brownian motion.*, Elsevier (2014), no. 19, 2740–2746.

- [12] B. d Andréa Novel, G. Campion, and G. Bastin, *Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization.*, The International Journal of Robotics Research **14** (1995), no. 6, 543–559.
- [13] A. d’Anjou, F. J. Torrealdea, and C. Sarasola, *Control of chaotic behaviour with ann.*, Proceedings of the IEEE-INNS-ENNS International Joint Conference on, Neural Networks, IEEE, July 2000, pp. 127–130.
- [14] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, and G. Bastin, *Theory of robot control*, Springer, 1997.
- [15] O. Y. Q. Delgado and J. R. Delgado, *Estimación del exponente de hurst y la dimensión fractal de una superficie topográfica a través de la extracción de perfiles.*, Revista GEOMÁTICA UD. GEO (2011), no. 5, 84–91.
- [16] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2 ed., 1989.
- [17] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen.*, annalen der physik **322** (1905), no. 8, 549–560.
- [18] K. Eriksson, D. Estep, and C. Johnson, *Applied mathematics: Body and soul, 2004*, vol. 1, Derivatives and Geometry in IR3, Springer, 2004.
- [19] H. E. Espitia and J. I. Sofrony, *Path planning of mobile robots using potential fields and swarms of brownian particles.*, IEEE Congress on, Evolutionary Computation (CEC), IEEE, June 2011.
- [20] A. M. Fraser and H. L. Swinney, *Independent coordinates for strange attractors from mutual information.*, Physical Review **33** (1986), no. 2, 1134–1140.
- [21] M. Frigo and S. G. Johnson, *Fftw: an adaptive software architecture for the fft.*, Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on, Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE, May 1998.
- [22] P. Gaspard, M. E. Briggs, M. K. Francis, J. V. Sengers, R. W. Gammon, J. R. Dorfman, and R. V. Calabrese, *Experimental evidence for microscopic chaos.*, nature (1998), no. 394, 865–868.
- [23] P. Grassberger and I. Procaccia, *Characterization of strange attractors.*, Physical Review **50** (1983), no. 5, 346–349.
- [24] J. L. Gutierrez, *Aventuras con fourier*, UNAM DirecciÃ³n General de Publicaciones, 2008.
- [25] F. Hackbarth, *Chaotic vs. random coverage missions.*, IEEE (2009), 2119–2123.
- [26] K. Khalil Hassan, *Nonlinear systems, 1997*, 2 ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 1996.
- [27] J. Hirao, M. Minami, Y. Mae, and G. Jingyu, *Emergence of robotic intelligence by chaos for catching fish.*, Proceedings of (Kumamoto, Japan), International Conference on Mechatronics, IEEE, May 2007.

- [28] C. H. Hsieh and J. S. Liu, *Nonlinear model predictive control for wheeled mobile robot in dynamic environment.*, The 2012 IEEE ASME (Kaohsiung, Taiwan), International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, IEEE, July 2012, pp. 363–3685.
- [29] H. E. Hurst, *Long-terms storage of reservoirs.*, Transactions of the American Society **116** (1951).
- [30] K. Inoue, K. Otsuka, M. Sugimoto, and N. Murakami, *Estimation of place of tractor and adaptative control method of autonomous tractor using ins and gps.*, Proceedings of Biorobotics (Valencia, Spain), IEEE, 1997, pp. 27–32.
- [31] T. Itami, *Controlling brownian motion applied to macroscopic group robots without mutual communication.*, 19th International Conference On, Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), IEEE, November 2014.
- [32] J. L. Jackson and S. R. Coriell, *On trapped trajectories in brownian motion.*, Journal of Mathematical Physics **5** (1964), no. 8.
- [33] J. W. Kantelhardt, E. K. Bunde, H. H. A. Rego, S. Havlin, and A. Bunde, *Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis.*, Elsevier Science B. V. **Physica A** (2001), no. 295, 441–454.
- [34] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, 2 ed., Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2003.
- [35] I. Kecskés and P. Odry, *Fuzzy route control of dynamic model of fourwheeled mobile robot.*, 4th IEEE, International Symposium on Logistics and Industrial Informatics, IEEE, September 2012.
- [36] M. B. Kennel, R. Brown, and H. D. I. Abarbanel, *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction.*, Physical Review **45** (1992), no. 6, 3403–3411.
- [37] A. Khanpoor, A. K. Khalaji, and S. Ali A. Moosavian, *Dynamics modeling and control of a wheeled mobile robot with omni-directional trailer.*, 22nd Iranian Conference on, Electrical Engineering (ICEE), IEEE, May 2014.
- [38] C. Y. Kim and M. C. Lee, *Cluster position control of brownian movement factors using boundary push method.*, Proceedings of the 4th (Wellington, New Zealand), International Conference on Autonomous Robots and Agents, IEEE, February 2009, pp. 10–12.
- [39] H. A. Kramers, *Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical interactions*, Physica **VII** (1940), no. 4, 284–304.
- [40] P. Langevin, *On the theory of brownian motion.*, C. R. Acad. Sci. (Paris) (1908), no. 146, 530–533.
- [41] J. A. R. Liñán, *Esquema de control basado en observación adaptable para sistemas caóticos clase p*, M. sc., Universidad Autónoma de Nuevo León, Nuevo León, México, Agosto 2005.

- [42] D. R. Lindgren, T. Hague, P. J. P. Smith, and J. A. Marchant, *Relating torque and slip in an odometric model for autonomous agricultural vehicle.*, Springer **13** (2002), 73–86.
- [43] A. De Luca and M. D. Benedetto, *Control of nonholonomic systems via dynamic compensation.*, Kybernetika **29** (1993), no. 6, 593–608.
- [44] D. G. Luenberger, *Introduction to dynamic systems, 1979*, vol. 1, John Wiley and Sons, USA, 1979.
- [45] S. E. Lyshevski and A. Nazarov, *Lateral maneuvering of ground vehicles: Modeling and control.*, Proc. of the (Chicago, Illinois), American Control Conference, IEEE, 2000, pp. 110–114.
- [46] B. Mandelbrot, *La geometría fractal de la naturaleza traducido por josep llosa, 1997*, 3 ed., Tusquets Editores S.A. de C.V., España, Septiembre 1977.
- [47] F. Martinez, E. Jacinto, and D. Acero, *Brownian motion as exploration strategy for autonomous swarm robots.*, Proceedings of the 2012 IEEE, International Conference on Robotics and Biomimetics, IEEE, December 2012, pp. 11–14.
- [48] P. F. Muir and C. P. Neuman, *Kinematic modeling of wheeled mobile robots.*, Wiley Periodicals **4** (1987), no. 2, 281–340.
- [49] Y. Nakamura and A. Sekiguchi, *The chaotic mobile robot.*, IEEE **17** (2001), no. 6, 898–904.
- [50] M. O'Connor, T. Bell, G. Elkaim, and B. Parkinson, *Automatic steering of farm vehicles using gps.*, Proceedings of the 3rd, Conference on Precision Agriculture, Stanford University, June 1996, pp. 767–778.
- [51] M. Okura, A. Ogura, A. Matsumoto, H. Ikeda, Md. M. Islam, and K. Murase, *Chaotic dynamics in evolutionary autonomous mobile robot and fitness evaluation with complexity measure.*, SICE (Fukui, Japan), Annual Conference, SICE, August 2003.
- [52] A. Ollero, *Robótica: Manipuladores y robots móviles*, Marcombo, 2001.
- [53] A. Ollero, A. G. Cerezo, and J. L. Martínez, *Fuzzy supervisory path tracking of mobile robots.*, Elsevier **2** (1994), no. 2, 313–319.
- [54] R. S. Ortigoza, J. R. G. Sánchez, V. M. H. Guzmán, C. M. Sánchez, and M. M. Aranda, *Trajectory tracking control for a differential drive wheeled mobile robot considering the dynamics related to the actuators and power stage.*, IEEE **14** (2016), no. 2, 657–664.
- [55] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, *Mosaic organization of dna nucleotides.*, Physical Review **49** (1994), no. 2, 1685–1689.
- [56] K. Peng, X. Ruan, and G. Zuo, *Dynamic model and balancing control for two-wheeled self-balancing mobile robot on the slopes.*, Proceedings of the 10th (Beijing, China), World Congress on Intelligent Control and Automation, IEEE, July 2012, pp. 3681–3685.
- [57] M. Z. Ab Rashid and S. N. Sidek, *Dynamic modeling and verification of unicycle mobile robot system.*, 4th International Conference on Mechatronics (ICOM), IEEE, May 2011.

- [58] C. Ren and S. Ma, *A continuous dynamic model for an omnidirectional mobile robot.*, International Conference on Robotics and Automation (ICRA), IEEE, June 2014.
- [59] F. Da Rold, *Deterministic chaos in mobile robots.*, Neural Networks (IJCNN), International Joint Conference on, IEEE, July 2015.
- [60] C. Samson, *Control of chained systems. application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots.*, IEEE **40** (1995), no. 1, 64–77.
- [61] C. E. Shannon and W. Weaver, *The mathematical theory of information.*, University of Illinois Press (1949).
- [62] M. Smoluchowski, *Sur le chemin moyenne parcouru par les molécules des gaz et sur son rapport la theorie de la diffusion.*, Bulletin International de l’Académie des Sciences de Cracovie (1906), 202–213.
- [63] R. L. S. Souza, M. D. do N. Forte, F. G. Nogueira, and B. C. Torrico, *Trajectory tracking control of a nonholonomic mobile robot with differential drive.*, Biennial Congress of Argentina (ARGENCON), IEEE, June 2016.
- [64] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence. lecture notes in mathematics*, Springer, 1981.
- [65] T. N. Thiele, *Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systematiques ar la methode des moindres carres.*, (1880).
- [66] G. Trefán, P. Grigolini, and B. J. West, Physical Review A **45** (1992), no. 2, 285–318.
- [67] E. Tunstel, *Operational performance metrics for mars exploration rovers.*, Journal of Field Robotics **24** (2007), no. 8-9, 651–670.
- [68] E. Tunstel, A. Howard, M. Maimone, and A. T. Ollennu, *Mars exploration rover performance as a baseline for flight rover autonomy technology assessment.*, Proceedings, ISAIRAS Conference, May 2005.
- [69] I. A. Wagner, M. Linderbaum, and A. M. Bruckstein, *Robotic exploration, brownian motion and electrical resistance.*, Springer-Verlag **RANDOM ’98** (1998), no. LNCS 1518, 116–130.
- [70] R. L. Williams, B. E. Carter, P. Gallina, and G. Rosati, *Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots.*, IEEE **18** (2002), no. 3, 285–293.
- [71] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, *Determining lyapunov exponents from a time series.*, Elsevier **16D** (1984), 285–318.
- [72] H. Xiao, Z. Li, C. Yang, L. Zhang, P. Yuan, L. Ding, and T. Wang, *Using model predictive control based on neuro-dynamics optimization.*, IEEE (2016).
- [73] Z. Yaghoubi, H. Zarabadipour, and M. A. Shoorehdeli, *Energy reduction with anticontrol of chaos for nonholonomic mobile robot system.*, Hindawi Publishing Corporation **2012** (2012), 1–14.

- [74] Y. Yamamoto, *Control and coordination of locomotion and manipulation of a wheeled mobile manipulators.*, Phd, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA USA, 1994.
- [75] H. Yang, X. Fan, P. Shi, and C. Hua, *Nonlinear control for tracking and obstacle avoidance of a wheeled mobile robot with nonholonomic constraint.*, IEEE **24** (2016), no. 2, 741–746.
- [76] A. Zhu and H. Leung, *Cooperation random mobile robots based on chaos synchronization.*, Proceedings of (Kumamoto, Japan), International Conference on Mechatronics, IEEE, May 2007.